МДУ – МӘКТӘПКӘ

Геометрия

10 11

10
11
Геометрия

ПРОСТРАНСТВОДА ТУРЫЛАР ҺӘМ ЯССЫЛЫКЛАРНЫҢ ҮЗАРА ТОРЫШЫ

Турылар параллель

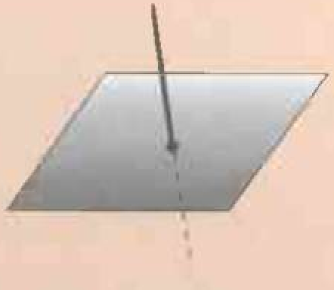
Турылар кисешә

Турылар чалышма

Туры һәм яссылык параллель

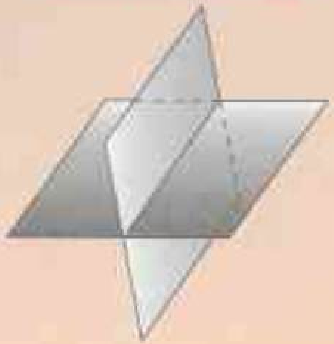
Туры яссылыкта ята

Туры һәм яссылык кисешә



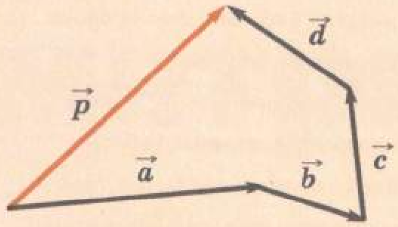
Яссылыклар параллель

Яссылыклар кисешә



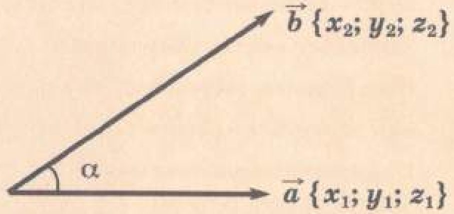
ПРОСТРАНСТВОДА ВЕКТОРЛАР

Векторларны кушу
Күппочмак кагыйдәсе



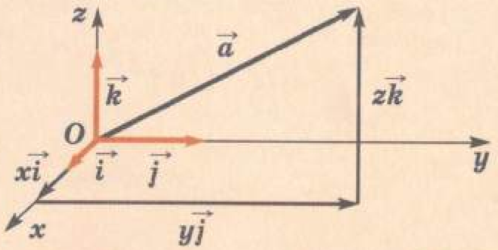
$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{p}$$

Векторларның скаляр тапкырчыгышы



$$\vec{a}\,\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\alpha=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

Векторның координаталары



$\vec{a}\{x; y; z\}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ $\qquad$ $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

МДУ – МӘКТӘПКӘ

Геометрия

10–11 СЫЙНЫФЛАР

Татар телендә гомуми белем бирү мәктәбе өчен дәреслек

Төп һәм профильле белемнәр

Россия Федерациясе
Мәгариф һәм фән министрлыгы
тарафыннан тәкъдим ителгән

Казан • Татарстан китап нәшрияты
Москва • «Просвещение»
2013

УДК 373.167.1:514*10/11
ББК 22.151 я721
Г39

Геометрия. 10—11 классы : учеб. для общеобразоват. учреждений : базовый и профил. уровни / [Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др.]. — 21-е изд. — М. : Просвещение, 2012. (МГУ — школе).

«МДУ — мәктәпкә» сериясе 1999 нчы елдан нәшер ителә.

Авторлары: **Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, Л. С. Киселёва, Э. Г. Позняк**

Әлеге басмага, математикадан белем бирүнең яңа стандартларына туры китереп, С. Б. Кадомцев һәм В. Ф. Бутузов тарафыннан әзерләнгән мөһим өстәмәләр кертелгән. Яңа материалның күп өлеше төп белем бирү мәктәпләре өчен мәҗбүри түгел, ул * тамгасы белән билгеләнгән.

Дәреслекнең фәнни җитәкчесе — академик **А. Н. Тихонов**

Охраняется действующим законодательством об авторских и смежных правах (Гражданский кодекс РФ, ч. 4, гл. 70). Воспроизведение всей книги или её части на любых видах носителей запрещается без письменного разрешения издательства.

Переводное издание учебника выпущено в свет по Сублицензионному договору 3/28-13 от 22.03.2013. Экземпляры переводного издания подлежат распространению исключительно в Республике Татарстан, а также среди татарской диаспоры на территориях других субъектов Российской Федерации.

Шартлы тамгалар:

25* — төп белем бирү мәктәбендә өйрәнү өчен мәҗбүри булмаган пункт

20 — төп белем бирү мәктәбендә мәҗбүри булмаган мәсьәлә

▼ — төп белем бирү мәктәбендә өйрәнү өчен мәҗбүри булмаган материал башы

△ — төп белем бирү мәктәбендә өйрәнү өчен мәҗбүри булмаган материал ахыры

Геометрия. 10—11 сыйныфлар : татар телендә гомуми белем
Г39 бирү мәкт. өчен д-лек / [Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев һ. б.; русчадан З. Х. Билалова, Л. Х. Мөхәммәтҗанова тәрж.]. — Казан : Татар. кит. нәшр., 2013.— 256 б. : рәс. б-н. — (МДУ — мәктәпкә)
ISBN 978-5-298-02460-0

УДК 373.167.1:514*10/11
ББК 22.151 я721

ISBN 978-5-298-02460-0

© Издательство «Просвещение», 1992
© Издательство «Просвещение», 2006, с изменениями
© Художественное оформление. Издательство «Просвещение», 2006
Все права защищены
© Татарчага тәрҗемә. «Мәгариф» нәшрияты, 2005
© Татарчага тәрҗемә. Татарстан китап нәшрияты, 2013, үзгәрешләр белән

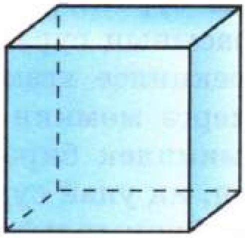
Кереш

1 Стереометрия фәне

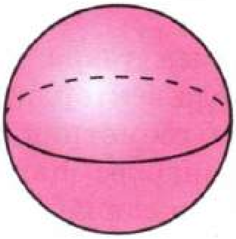
Геометриянең мәктәп курсы ике кисәктән: планиметрия һәм стереометриядән тора. Планиметриядә яссылыктагы геометрик фигураларның үзлекләре өйрәнелә. **Стереометрия — геометриянең пространстводагы фигураларның үзлекләрен өйрәнә торган бүлеге.** «Стереометрия» сүзе «стереос» — күләмле, пространстволы һәм «метрео» — үлчәү дигән грек сүзләреннән алынган.

Нокта, туры һәм **яссылыклар** пространстводагы иң гади һәм шул ук вакытта төп фигуралар булып тора дип әйтергә мөмкин. Бу фигуралар белән беррәттән без **геометрик җисемнәрне** һәм аларның **өслекләрен** тикшерербез. Әйләнә-тирәбездәге әйберләр безгә геометрик җисемнәрне күзалларга мөмкинлек бирә. Мәсәлән, өслеге күппочмаклардан торган кристаллар геометрик җисем формасында була. Андый өслекләрне **күпкырлыклар** дип атыйлар. Иң гади күпкырлыкларның берсе — куб (рәс. 1, *а*). Сыеклык тамчылары авырлык югалу халәтендә **шар** дип аталган геометрик җисемне хәтерләтә (рәс. 1, *б*). Футбол тубы шундый ук формада. Консерв банкасы **цилиндр** дип аталган геометрик җисем рәвешендә була (рәс. 1, *в*).

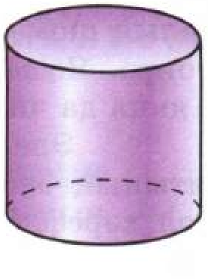
Геометрик җисемнәр,— реаль тормыштагы предметлардан аермалы буларак, һәртөр геометрик фигуралар кебек үк күзаллана торган объектлар. Без геометрик җисемне пространстводан өслек яки әлеге җисемнең **чиге** белән аерып алынган пространствоның бер өлеше буларак күз алдына китерәбез. Мәсәлән, шарның чиге — **сфера,** ә цилиндрның чиге ике түгәрәктән — цилиндрның нигезләреннән һәм ян өслегеннән гыйбарәт.



а)
Куб



б)
Шар



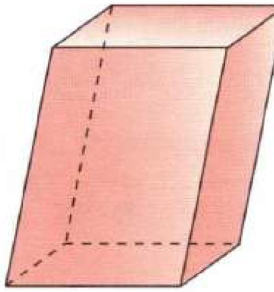
в)
Цилиндр

Рәс. 1

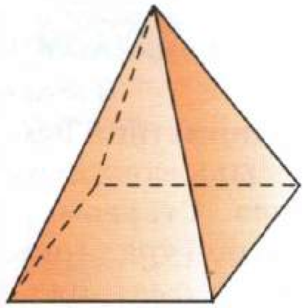
Геометрик фигураларның — күзаллана торган объектларның үзлекләрен өйрәнеп, без реаль тормыштагы предметларның геометрик үзлекләре (аларның формалары, үзара торышлары һ. б.) турында беләбез һәм бу үзлекләрдән көндәлек тормышта файдаланабыз. Геометриянең тормыштагы гамәли әһәмияте менә шуннан гыйбарәт. Геометрия, аерым алганда стереометрия, төзү эшендә, архитектурада, машина төзелешендә, геодезиядә, фән һәм техниканың күп кенә башка өлкәләрендә киң кулланыла.

Пространство фигураларын, атап әйткәндә геометрик җисемнәрне өйрәнгәндә, аларның сызымдагы сурәтләреннән файдаланалар. Пространство фигурасының сурәте булып аның теге яки бу яссылыкка проекциясе хезмәт итә. Бер үк фигура төрлечә сурәтләнергә мөмкин. Гадәттә, фигураны дөрес күзалларга мөмкинлек бирә торган һәм аның үзлекләрен өйрәнү өчен, иң уңай сурәте сайлап алына. 2, *а*, *б* рәсемнәрендә ике күпкырлык — **параллелепипед** һәм **пирамида**, ә 2, *в* рәсемендә **конус** сурәтләнгән. Анда бу фигураларның күренми торган өлешләре өзекле сызыклар белән күрсәтелгән. Пространство фигураларын сурәтләү кагыйдәләре 1 нче кушымтада бирелгән.

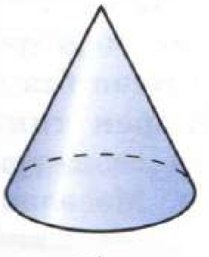
Без ике ел дәвамында туры һәм яссылыкларның үзара торышын, күпкырлыкларны, пространствода векторларны һәм координаталар методын, «түгәрәк» геометрик җисемнәрне — цилиндр, конус, шарны өйрәнербез һәм җисемнәрнең күләмнәре турындагы мәсьәләләрне тикшерербез.



а)
Параллелепипед



б)
Пирамида



в)
Конус

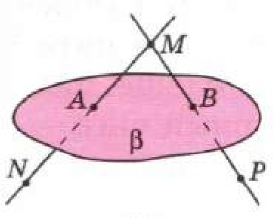
Рәс. 2

2 Стереометрия аксиомалары

Планиметриядә нокта һәм турылар төп фигуралар иде. Стереометриядә алар белән беррәттән тагын бер төп фигура — **яссылык** тикшерелә. Өстәл яки стенаның шома өслеге яссылыкны күзалларга мөмкинлек бирә. Яссылыкны геометрик фигура буларак барлык якка да чиксез җәелгән дип күзалларга кирәк.

Элекке кебек үк нокталарны — латин алфавитының баш хәрефләре A, B, C һ. б., ә турыларны юл хәрефләре a, b, c һ. б. белән яки латин алфавитының ике баш хәрефе белән AB, CD һ. б. рәвешендә тамгаларбыз. Яссылыкларны грек хәрефләре α, β, γ һ. б. белән тамгаларбыз. Рәсемдә яссылык параллелограмм (рәс. 3, *а*) яки иректе рәвештә сызылган өлкә (рәс. 3, *б*) рәвешендә сурәтләнә.

а)



б)

Рәс. 3

Билгеле, һәр яссылыкта пространствоның нинди дә булса нокталары ята, ләкин пространствоның барлык нокталары да бер үк яссылыкта ятмый. 3, *б* рәсемдә A һәм B нокталары β яссылыгында ята (β яссылыгы бу ноктлар аша үтә), ә M, N, P нокталары бу яссылыкта ятмый. Кыскача аны болай язалар: $A \in \beta$, $B \in \beta$, $M \notin \beta$, $N \notin \beta$, $P \notin \beta$.

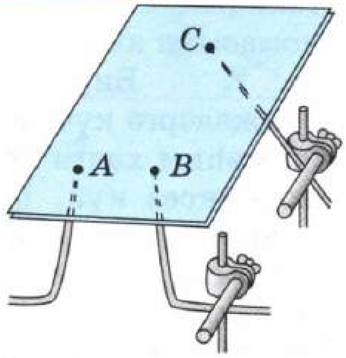
Нокта, туры һәм яссылыкларның үзара торышына кагылышлы төп үзлекләр аксиомалар рәвешендә әйтеп бирелгән. Стереометрия аксиомаларының тулаем системасы күп өлеше безгә планиметрия курсыннан таныш булган аксиомалардан тора. Аксиомаларның тулы исемлеге һәм аларның кайбер нәтиҗәләре 2 нче кушымтада бирелгән. Биредә без пространстводагы нокта, туры һәм яссылыкларның үзара торышы турындагы бары тик өч аксиоманы бирербез. Алар түбәндә A_1, A_2, A_3 хәрефләре белән тамгаланып бирелә.

A_1

Бер турыда ятмаган теләсә нинди өч нокта аша яссылык үтә һәм бары тик бер генә.

4 нче рәсемдә сурәтләнгән модель бу аксиоманың иллюстрациясе булып хезмәт итә. Бер турыда ятмаган A, B һәм C нокталары аша үтүче яссылыкны кайвакыт ABC яссылыгы дип атыйлар.

Ирекле рәвештә өч кенә нокта түгел, ә бәлки дүрт нокта алсак, алар аша бер яссылык та үтмәве мөмкин икәнен искәртеп китәбез. Икенче төрле әйткәндә, дүрт нокта бер яссылыкта ятмаска мөмкин. Бу фактны тормышта ачык итеп раслап булуын һәркем белә: әгәр урындык аякларының озынлыгы тигез булмаса, ул өч аякта тора, ягъни өч «нокта»га таяна, ә дүртенче аягының очы (дүртенче «нокта») идән яссылыгында ятмый, һавада асылынып кала.



A_1 аксиомасына иллюстрация: пластинаны бер турыда ятмаган өч нокта: A, B һәм C нокталары тотып тора

Рәс. 4

A_2

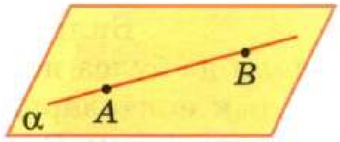
Турының ике ноктасы бер яссылыкта ятса, турының барлык нокталары да шул яссылыкта ята*.

* Биредә һәм алга таба да «ике нокта» («ике туры», «ике яссылык») турында сөйләгәндә, бу нокталарны (турыларны, яссылыкларны) төрле дип исәплләрбез.

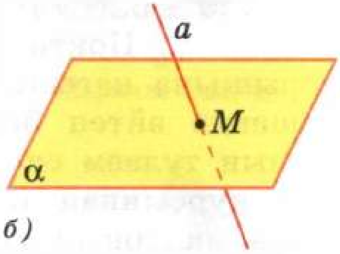
Мондый очракта **туры яссылыкта ята** яки **яссылык туры аша үтә**, диләр (рәс. 5, *а*).

A_2 аксиомасында күрсәтелгән үзлек сызым линейкасының «тигезлеген» тикшергәндә файдаланыла. Моның өчен линейканы өстәл өслеге яссылыгына кырые белән куялар. Линейканың кырые тигез (туры сызык) булса, ул үзенең барлык нокталары белән өстәл өслегенә ята. Кырый тигез булмаса, кырый белән өстәл өслеге арасында буш ара калыр.

A_2 аксиомасыннан туры бирелгән яссылыкта ятмаса, аның яссылык белән бердән артык уртак ноктасы булмавы килеп чыга. Әгәр туры белән яссылыкның бер генә уртак ноктасы булса, алар **кисешәләр**, диләр (рәс. 5, *б*).



а)
AB турысы α яссылыгында ята



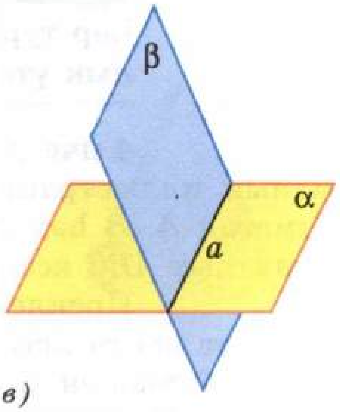
б)
а турысы һәм α яссылыгы *M* ноктасында кисешәләр

A_3

Әгәр ике яссылыкның уртак ноктасы булса, аларның барлык уртак нокталары яткан уртак турысы була.

Мондый очракта **яссылыклар туры буенча кисешәләр**, диләр (рәс. 5, *в*). Бүлмәдәге чиктәш ике стенаның, стена белән түшәмнең кисешү сызыгы A_3 аксиомасына ачык иллюстрация булып тора.

Бирелгән аксиомалардан чыккан беренче нәтиҗәләргә күчкәнгә кадәр, алга таба файдаланылачак бер мөһим хәлгә тукталыйк. Пространствода яссылыклар чиксез күп, һәм һәр яссылыкта планиметриянең барлык аксиомалары һәм теоремалары урынлы. Моннан тыш, планиметрия курсыннан таныш булган өчпочмакларның тигезлек һәм охшашлык билгеләре төрле яссылыкларда урнашкан өчпочмаклар өчен дә дөрес (2 нче кушымтаны кара).



в)
α һәм β яссылыклары *а* турысы буенча кисешәләр

Рәс. 5

3 Аксиомалардан кайбер нәтиҗәләр

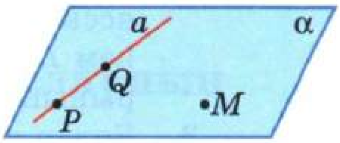
Теорема

Туры һәм анда ятмаган нокта аша яссылык үтә һәм бары тик бер генә.

Исбатлау

а турысын һәм бу турыда ятмаган *M* ноктасын карыйк (рәс. 6). *а* турысы һәм *M* ноктасы аша

яссылык үткәнен исбатларбыз. a турысында P һәм Q нокталары билгелибез. M, P һәм Q нокталары бер турыда ятмыйлар, шуңа күрә A_1 аксиомасы буенча бу нокталар аша ниндидер α яссылыгы үтә. a турысының ике ноктасы (P һәм Q) α яссылыгында ятканга күрә, A_2 аксиомасы буенча α яссылыгы a турысы аша үтә.



Рәс. 6

a турысы һәм M ноктасы аша үтүче яссылык M, P һәм Q нокталары аша да үткәнгә күрә, моннан a турысы һәм M ноктасы аша үтүче яссылыкның берданберлеге килеп чыга. Димәк, ул α яссылыгы белән тәңгәл килә, чөнки A_1 аксиомасы буенча M, P һәм Q нокталары аша бер генә яссылык үтә. Теорема исбатланды.

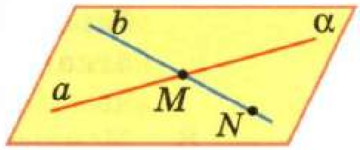
Теорема

Кисешүче ике туры аша яссылык үтә һәм бары тик бер генә.

Исбатлау

M ноктасында кисешүче a һәм b турыларын карыйк (рәс. 7) һәм бу турылар аша яссылык үткәнен һәм бары тик бер генә икәнен исбатлыйк.

b турысында M ноктасы белән тәңгәл килмәгән нинди дә булса N ноктасы билгеләп, N ноктасы һәм a турысы аша үтүче α яссылыгын тикшерик. b турысының ике ноктасы α яссылыгында ята, шуңа күрә A_2 аксиомасы буенча α яссылыгы b турысы аша үтә. Шулай итеп, α яссылыгы a һәм b турылары аша үтә. a һәм b турылары аша үтүче теләсә нинди яссылык N ноктасы аша да үткәнгә күрә, моннан андый яссылыкның берданберлеге килеп чыга. Шулай булгач, N ноктасы һәм a турысы аша бер генә яссылык үткәнлектән, ул яссылык α яссылыгы белән тәңгәл килә. Теорема исбатланды.



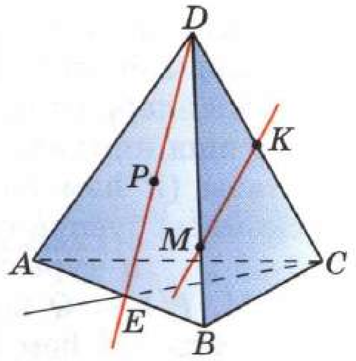
Рәс. 7

Сораулар һәм мәсьәләләр

1 8 нче рәсем буенча: а) PE, MK, DB, AB, EC турылары яткан яссылыкларны; б) DK турысының ABC яссылыгы белән, CE турысының ADB яссылыгы белән кисешү ноктасын; в) ADB һәм DBC яссылыкларында яткан нокталарны; г) ABC белән DCB, ABD белән CDA, PDC белән ABC яссылыкларының кисешү турыларын әйтегез.

2 9 нчы рәсем буенча: а) DCC_1 һәм BQC яссылыкларында яткан нокталарны; б) AA_1 турысы яткан яссылыкларны; в) MK турысының ABD яссылыгы белән, DK һәм BP турыларының $A_1B_1C_1$ яссылыгы белән кисешү нокталарын; г) AA_1B_1 белән ACD, PB_1C_1 белән ABC

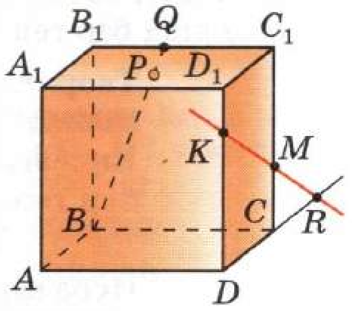
яссылыгының кисешү турыларын; д) MK һәм DC, B_1C_1 һәм BP, C_1M һәм DC турыларының кисешү нокталарын әйтегез.



Рәс. 8

3 Болар дөресме: а) теләсә нинди өч нокта бер яссылыкта ята; б) теләсә нинди дүрт нокта бер яссылыкта ята; в) теләсә нинди дүрт нокта бер яссылыкта ятмый; г) теләсә нинди өч нокта аша яссылык үтә һәм бары тик бер генә?

4 A, B, C һәм D нокталары бер яссылыкта ятмый. а) Аларның кайсы да булса өчесе бер турыда ятуы мөмкинме? б) AB һәм CD турыларының кисешүе мөмкинме? Җавабыгызны нигезләгез.



Рәс. 9

5 Турыда ятучы бирелгән өч нокта аша яссылык үткәнен исбатлагыз. Шундый ничә яссылык бар?

6 Бирелгән өч нокта пар-пар кисемтәләр белән тоташтырылган. Барлык кисемтәләрнең бер яссылыкта ятканын исбатлагыз.

7 Ике туры M ноктасында кисешә. M ноктасы аша үтмәүче һәм бирелгән турыларны кисүче барлык турыларның бер яссылыкта ятканын исбатлагыз. M ноктасы аша үтүче барлык турылар бер яссылыкта ятамы?

8 Мондый раслама дөресме: а) әйләнәнең ике ноктасы яссылыкта ятса, әйләнә тулысынча шул яссылыкта ята; б) әйләнәнең өч ноктасы яссылыкта ятса, әйләнә тулысы белән шул яссылыкта ята?

9 Параллелограммның чиктәш ике түбәсе һәм диагональләренең кисешү ноктасы α яссылыгында ята. Параллелограммның калган ике түбәсе α яссылыгында ятамы? Җавабыгызны нигезләгез.

10 Туры: а) өчпочмакның ике ягын кисеп үтсә; б) өчпочмак түбәләренең берсе аша үтсә, ул бирелгән өчпочмак яссылыгында ята дип раслау дөресме?

11 Туры һәм бу турыда ятмаган бер нокта бирелгән. Бирелгән нокта аша үтеп, бирелгән турыны кисүче барлык турыларның бер яссылыкта ятканын исбатлагыз.

12 A, B, C, D нокталары бер яссылыкта ятмый. A, B, C һәм A, B, D нокталары аша үтүче яссылыклар кисешәме?

13 Ике яссылыкның: а) бер генә уртак ноктасы; б) ике генә уртак ноктасы; в) бер генә уртак турысы булуы мөмкинме?

14 Өч туры бер нокта аша үтә. Аларның һәр икесе аша яссылык үткәрелгән. Барлыгы ничә яссылык үткәрелгән?

15 Өч туры пар-пар кисешәләр. Аларның я бер яссылыкта ятканын, я уртак нокталары булуын исбатлагыз.

I бүлек

Турыларның һәм яссылыкларның параллельлеге

§ 1 Турыларның, туры белән яссылыкның параллельлеге

4 Пространствода параллель турылар

Пространствода параллель турылар төшенчәсен бирик.

Билгеләмә

Пространствода ике туры бер яссылыкта ятса һәм кисешмәсә, алар **параллель** дип атала.

a һәм b турыларының параллельлеге болай тамгалана: $a \parallel b$. 10 нчы рәсемдә a һәм b турылары параллель, ә a һәм c, a һәм d турылары параллель түгел.

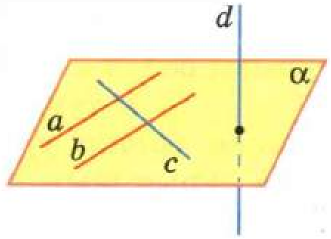
Параллель турылар турындагы теореманы исбатлыйк.

Теорема

Пространствоның бирелгән турыда ятмаган теләсә нинди ноктасы аша әлеге бирелгән турыга параллель туры үтә һәм бары тик бер генә.

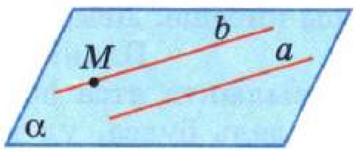
Исбатлау

a турысын һәм бу турыда ятмаган M ноктасын карыйк (рәс. 11). a турысы һәм M ноктасы аша яссылык үтә һәм бары тик бер генә (п. 3). Бу яссылыкны α хәрефе белән тамгалыйк. M ноктасы аша a турысына параллель үтүче туры M ноктасы һәм a турысы белән бер яссылыкта, ягъни α яссылыгында ятарга тиеш. Ләкин, планиметрия курсыннан билгеле булганча, α яссылыгында M ноктасы аша a турысына параллель туры үтә һәм бары тик бер генә. 11 нче рәсемдә бу туры b хәрефе белән тамгаланган. Шулай итеп, b — M ноктасы аша үтүче һәм a турысына параллель бердәнбер туры. Теорема исбатланды.



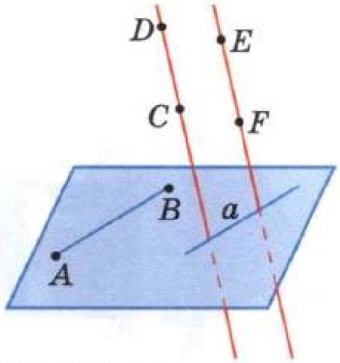
Рәс. 10

Алга таба безгә кисемтәләрнең параллельлеге, кисемтә белән турының параллельлеге, нурларның параллельлеге төшенчәләре кирәк булачак. Ике кисемтә параллель турыларда ятса, алар **параллель** дип атала. Кисемтә белән турының параллельлеге, шулай ук



Рәс. 11

ике нурның параллельлеге шушыңа охшаш рәвештә билгеләнә. 12 нче рәсемдә CD һәм EF кисемтәләре параллель ($CD \parallel EF$), ә AB һәм CD кисемтәләре параллель түгел, AB кисемтәсе a турысына параллель ($AB \parallel a$).



Рәс. 12

5 Өч турының параллельлеге

Алга таба аңлатуны дәвам итү өчен, яссылыкның параллель турылар белән кисешүе турындагы лемманы исбатларбыз.

Лемма

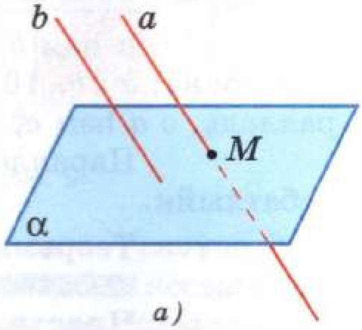
Әгәр ике параллель турының берсе яссылыкны кисеп үтсә, ул вакытта икенче туры да бу яссылыкны кисеп үтә.

Исбатлау

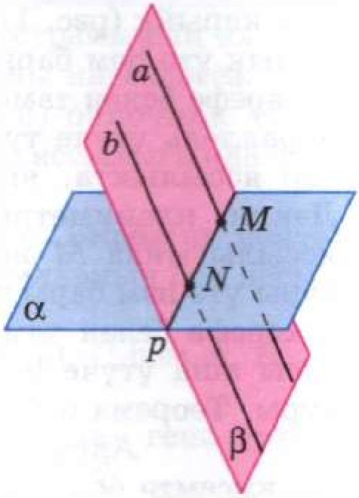
a һәм b параллель турыларын карыйк, аларның берсе — a турысы — α яссылыгын M ноктасында кисеп үтә (рәс. 13, *а*). b турысының да α яссылыгын кисеп үтүен, ягъни аның белән бер уртак ноктасы булуын исбатлыйк.

a һәм b параллель турылары яткан яссылыкны β хәрефе белән тамгалыйк. Төрле ике яссылык: α һәм β ның уртак M ноктасы булганлыктан, A_3 аксиомасы буенча, алар ниндидер p турысы буйлап кисешәләр (рәс. 13, *б*). Бу туры β яссылыгында ята һәм a турысын кисеп үтә (M ноктасында), шуңа күрә ул аңа параллель булган b турысын ниндидер N ноктасында кисеп үтә. p турысы шулай ук α яссылыгында ята, шулай булгач, N — α яссылыгы ноктасы. Димәк, N — b турысы белән α яссылыгының уртак ноктасы.

b турысының α яссылыгы белән N ноктасыннан башка уртак ноктасы юклыгын исбатлыйк. Бу b турысының α яссылыгын кискәнен белдерер дә. Дөрестән дә, b турысының α яссылыгы белән тагын бер уртак ноктасы булса, ул тулысынча α яссылыгында ятар иде. Шулай булгач, α һәм β яссылыкларының уртак турысы булыр, ягъни p турысы белән тәңгәл килер иде. Ләкин моның булуы мөмкин түгел, чөнки шарт буенча a һәм b турылары параллель, ә a һәм p турылары кисешә. Лемма исбатланды. △



а)



б)

Рәс. 13

Планиметрия курсыннан, әгәр өч туры бер яссылыкта ятса һәм аларның икесе өченче турыга параллель булса, ул вакытта бу ике турының параллель булуы билгеле. Шушыңа аналогик расламаны пространстводагы өч туры өчен исбатлыйк.

Теорема

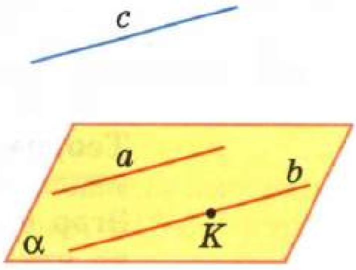
Әгәр ике туры өченче турыга параллель булса, алар параллель була.

Исбатлау

$a \parallel c$ һәм $b \parallel c$ булсын. $a \parallel b$ икәнен исбатлыйк. Моның өчен a һәм b турыларының: 1) бер яссылыкта ятуын һәм 2) кисешмәвен исбатларга кирәк.

1) b турысында нинди дә булса K ноктасы билгелик тә a турысы һәм K ноктасы аша үтүче яссылыкны α хәрефе белән тамгалыйк (рәс. 14). b турысының бу яссылыкта ятуын исбатлыйк. Дөрестән дә, b турысы α яссылыгын кисә дип уйласак, яссылыкның параллель турылар белән кисешүе турындагы лемма буенча c турысы да α яссылыгын кисә. Ләкин $c \parallel a$ булганлыктан, a турысы да α яссылыгын кисә, ә a турысы α яссылыгында ятканлыктан, моның булуы мөмкин түгел.

2) a һәм b турылары кисешми, шулай булмаган очракта аларның кисешү ноктасы аша c турысына параллель ике туры (a һәм b) үтәр иде, ә моның булуы мөмкин түгел. Теорема исбатланды.



Рәс. 14

6 Туры белән яссылыкның параллельлеге

Әгәр турының ике ноктасы бирелгән яссылыкта ятса, A_2 аксиомасы буенча туры тулысынча шул яссылыкта ята. Моннан **пространствода туры белән яссылыкның үзара торышының өч очрагы булуы мөмкин** икәнлеге килеп чыга:

а) туры яссылыкта ята (5, *а* рәсемен кара);

б) туры белән яссылыкның бер генә уртак ноктасы бар, ягъни кисешәләр (5, *б* рәсемен кара);

в) туры белән яссылыкның бер генә дә уртак ноктасы юк.

Билгеләмә

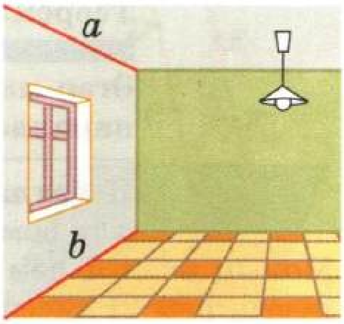
Туры һәм яссылыкның уртак нокталары булмаса, алар параллель дип атала.

a турысы һәм α яссылыгының параллельлеге болай тамгалана: $a \parallel \alpha$. Троллейбус яки трамвай өчен тарттырылган үткәргечләр турының яссылыкка параллельлеген ачык күзалларга мөмкинлек бирә — бу үткәргечләр җир яссылыгына параллель. Икенче мисал итеп стена белән түшәмнең кисешү сызыгын алырга була, бу сызык идән яссылыгына параллель (рәс. 15, *а*).

Идән яссылыгында бу сызыкка параллель туры барлыгын искәртәбез. Мәсәлән, идәннең шул ук стена белән кисешү сызыгы шундый туры була.

15, *а* рәсемендә күрсәтелгән турылар *a* һәм *b* хәрефләре белән тамгаланган. Әгәр α яссылыгында бу яссылыкта ятмаган *a* турысына параллель *b* турысы булса, ул вакытта *a* турысы һәм α яссылыгы параллель икән (рәс. 15, *б*).

Икенче төрле әйткәндә, α яссылыгында *a* турысына параллель *b* турысының булуы — *a* турысының α яссылыгына параллельлеге турында нәтиҗә ясарга мөмкинлек биргән **билге** ул. Бу расламаны теорема рәвешендә әйтеп бирик.



а)

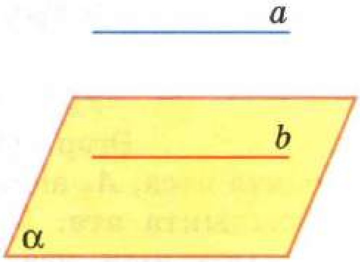
Теорема

Әгәр бирелгән яссылыкта ятмаган туры бу яссылыкта яткан нинди дә булса турыга параллель булса, ул туры бирелгән яссылыкка параллель.

Исбатлау

α яссылыгын һәм ике параллель туры — *a* һәм *b* ны карыйк; *b* турысы α яссылыгында ята, ә *a* турысы бу яссылыкта ятмый (рәс. 15, *б*). $a \parallel \alpha$ икәнен исбатлыйк.

a турысы α га параллель түгел дип уйлыйк. Ул вакытта *a* турысы α яссылыгын кисә, димәк, яссылыкны параллель турылар белән кисү турындагы лемма буенча, *b* турысы да α яссылыгын кисә. Ләкин моның булуы мөмкин түгел, чөнки *b* турысы α яссылыгында ята. Шулай итеп, *a* турысы α яссылыгын кисми, шуңа күрә ул бу яссылыкка параллель. Теорема исбатланды.



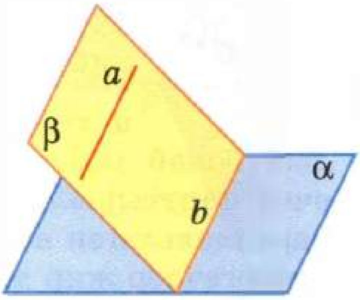
б)

Рәс. 15

Мәсьәләләр чишүдә еш кулланыла торган тагын ике расламаны исбатларбыз.

1°. Әгәр яссылык икенче яссылыкка параллель булган бирелгән туры аша үтсә һәм бу яссылыкны киссә, яссылыкларның кисешү сызыгы бирелгән турыга параллель була.

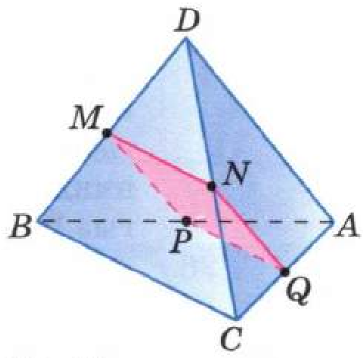
α яссылыгына параллель булган бирелгән *a* турысы аша α яссылыгын *b* турысы буйлап кисүче β яссылыгы үтсен, ди (рәс. 16). $b \parallel a$ икәнен исбатлыйк. Дөрестән дә, бу турылар бер яссылыкта (β яссылыгында) ята һәм кисешмиләр: шулай булмаганда *a* турысы α яссылыгын да кисәр иде, ә шарт буенча $a \parallel \alpha$ булганлыктан, моның булуы мөмкин түгел.



Рәс. 16

2'. Әгәр ике параллель турының берсе бирелгән яссылыкка параллель булса, икенче туры да я бирелгән яссылыкка параллель, я шул яссылыкта ята.

Дөрестән дә, a һәм b — параллель турылар, өстәвенә a турысы α яссылыгына параллель булсын. Ул вакытта a турысы α яссылыгын кисми, димәк, яссылыкның параллель турылар белән кисешүе турындагы лемма буенча b турысы да α яссылыгын кисми. Шуңа күрә b турысы α яссылыгына параллель, я бу яссылыкта ята.



Рәс. 17

Сораулар һәм мәсьәләләр

16 Параллель a һәм b турылары α яссылыгында ята. a һәм b турыларын кисүче c турысы да α яссылыгында ятуын исбатлагыз.

17 17 нче рәсемдә M, N, Q һәм P — DB, DC, AC һәм AB кисемтәләренең урталары. $AD = 12$ см, $BC = 14$ см булса, $MNQP$ дүртпочмагының периметрын табыгыз.

18 C ноктасы AB кисемтәсендә ята. A ноктасы аша — яссылык, ә B һәм C ноктлары аша бу яссылыкны тиңдәшле рәвештә B_1 һәм C_1 нокталарында кисүче параллель турылар үткәрелгән. а) C ноктасы — AB кисемтәсенең уртасы, $BB_1 = 7$ см; б) $AC : CB = 3 : 2$ һәм $BB_1 = 20$ см булса, CC_1 кисемтәсенең озынлыгын табыгыз.

19 $ABCD$ параллелограммының AB һәм BC яклары α яссылыгын кисә. AD һәм DC турылары да α яссылыгын кисүен исбатлагыз.

20 Трапециянең урта сызыгы α яссылыгында ята. Трапециянең нигезләрен эченә алган турылар α яссылыгын кисәме? Җавабыгызны нигезләгез.

21 ABC һәм ABD өчпочмаклары бер яссылыкта ятмый. CD кисемтәсенә параллель теләсә нинди туры бирелгән өчпочмакларның яссылыкларын кисүен исбатлагыз.

22 A һәм B нокталары α яссылыгында ята, ә C ноктасы бу яссылыкта ятмый. AC һәм BC кисемтәләренең уртасы аша үтүче туры α яссылыгына параллель икәнен исбатлагыз.

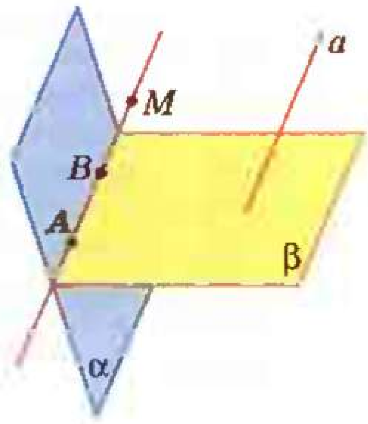
23 M ноктасы $ABCD$ турыпочмаклыгы яссылыгында ятмый. CD турысы ABM яссылыгына параллель икәнен исбатлагыз.

24 M ноктасы нигезе AD булган $ABCD$ трапециясе яссылыгында ятмый. AD турысы BMC яссылыгына параллель икәнен исбатлагыз.

25 Бирелгән туры ике яссылыкның кисешү турысына параллель булып, ул яссылыкларда ятмаса, бу туры әлеге яссылыкларга параллель икәнен исбатлагыз.

26 ABC өчпочмагының AC ягы α яссылыгына параллель, ә AB һәм BC яклары бу яссылык белән M һәм N нокталарында кисешәләр. ABC һәм MBN өчпочмакларының охшаш икәнен исбатлагыз.

27 C ноктасы AB кисемтәсендә ята, өстәвенә $AB : BC = 4 : 3$. 12 см га тигез булган CD кисемтәсе B ноктасы аша үтүче α яссылыгына параллель. AD турысы α яссылыгын ниндидер E ноктасында кискәнен исбатлагыз һәм BE кисемтәсен табыгыз.



Рәс. 18

28 ABC өчпочмагының AB һәм AC якларында, $DE = 5$ см һәм $\frac{BD}{DA} = \frac{2}{3}$ булырлык итеп, тиңдәшле рәвештә D һәм E нокталары алынган. α яссылыгы B һәм C нокталары аша үтә һәм DE кисемтәсенә параллель. BC кисемтәсенең озынлыгын табыгыз.

29 $ABCD$ трапециясенең BC нигезе 12 см га тигез. M ноктасы трапеция яссылыгында ятмый, ә K ноктасы — BM кисемтәсенең уртасы. ADK яссылыгы MC кисемтәсен ниндидер H ноктасында кискәнен исбатлагыз һәм KH кисемтәсен табыгыз.

30 $ABCD$ трапециясенең AB нигезе α яссылыгына параллель, ә C түбәсе бу яссылыкта ята. а) Трапециянең CD нигезе α яссылыгында ятуын; б) трапециянең урта сызыгы α яссылыгына параллель икәнен исбатлагыз.

31 α яссылыгы ABC өчпочмагының BC ягына параллель һәм AB ягының уртасы аша үтә. α яссылыгы AC ягының уртасы аша да үтүен исбатлагыз.

32 α һәм β яссылыклары AB турысы буйлап кисешәләр. a турысы α яссылыгына да, шулай ук β яссылыгына да параллель. a һәм AB турыларының параллель икәнен исбатлагыз.

Чишү

A ноктасы аша a турысына параллель AM турысы үткәрәбез* (рәс. 18). a турысы α һәм β яссылыкларына параллель булгач, AM турысы α яссылыгында да, β яссылыгында да ята (п. 6, 2° раславы). Шулай итеп, AM — α һәм β яссылыкларының кисешү турысы, ягъни ул AB турысы белән тәңгәл килә. Шулай булгач, $AB \parallel a$.

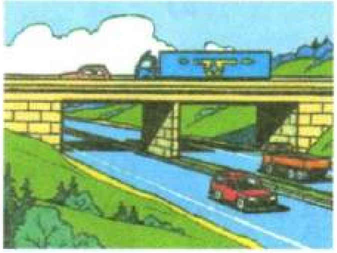
33 Әгәр бер туры аша үтмәүче өч яссылык пар-пар кисешсәләр, аларның кисешү турылары я параллель, я уртак ноктага ия икәнен исбатлагыз.

* «Туры үткәрәбез», «яссылык үткәрәбез» әйтелмәләрен туры мәгънәсендә аңларга кирәк түгел (без пространствода туры да, яссылык та үткәрмибез). Бу сүзләр күрсәтелгән туры яки яссылыкның тикшерүгә кертелүен белдерә.

§ 2 Пространствода турыларның үзара торышы. Ике туры арасындагы почмак

7 Чалышма турылар

Әгәр ике туры кисешсә яки параллель булса, алар бер яссылыкта яталар. Ләкин пространствода ике турының шулай урнашкан булуы да мөмкин: алар бер яссылыкта ятмыйлар, ягъни бу ике туры аша үтә торган яссылык юк. Билгеле, андый турылар кисешми һәм параллель дә түгел.



Рәс. 19

Билгеләмә

Ике туры бер яссылыкта ятмаса, алар **чалышма турылар** дип атала.

Берсе эстакада буйлап, икенчесе эстакада астыннан үтә торган ике юл чалышма турыларны ачык күзалларга мөмкинлек бирә (рәс. 19).

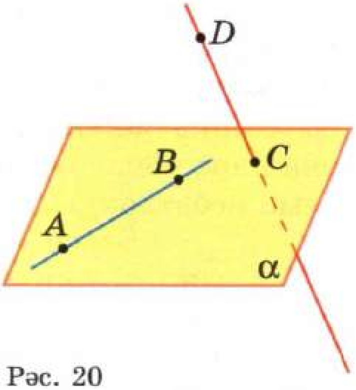
Чалышма турылар билгесен белдергән теореманы исбатлыйк.

Теорема

Әгәр ике турының берсе ниндидер яссылыкта ятса, ә икенче туры бу яссылыкны беренче турыда ятмаган ноктада кисеп үтсә, ул вакытта бу турылар чалышма була.

Исбатлау

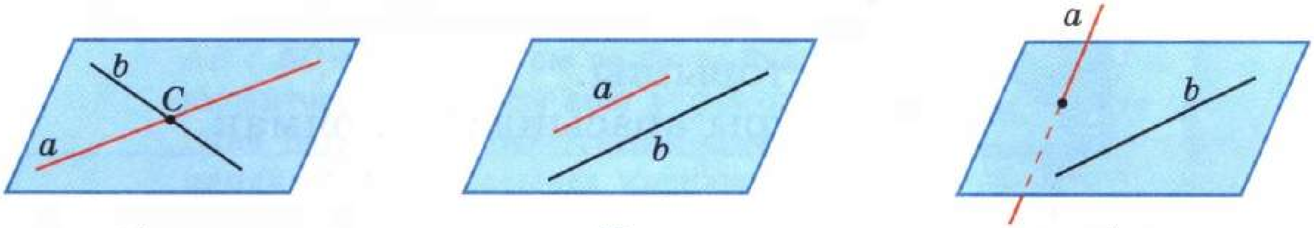
α яссылыгында яткан AB турысын һәм бу яссылыкны C ноктасында кисеп үтүче CD турысын карыйк (C ноктасы AB турысында ятмый, рәс. 20). AB һәм CD чалышма турылар икәнен, ягъни аларның бер яссылыкта ятмавын исбатларбыз. Дөрестән дә, AB һәм CD ниндидер β яссылыгында ята дип уйласак, ул вакытта β яссылыгы AB турысы һәм C ноктасы аша үтәр һәм шуңа күрә α яссылыгы белән тәңгәл килер. Ләкин моның булуы мөмкин түгел, чөнки CD турысы α яссылыгында ятмый. Теорема исбатланды.



Рәс. 20

Шулай итеп, **пространствода ике турының үзара торышының өч очрагы булуы мөмкин:**

а) **турылар кисешә**, ягъни бер генә уртак нокталары бар (рәс. 21, *а*);



а) Кисешүче турылар

б) Параллель турылар

в) Чалышма турылар

Рәс. 21

б) **турылар параллель,** ягъни бер яссылыкта яталар һәм кисешмиләр (рәс. 21, *б*);

в) **турылар чалышма,** ягъни бер яссылыкта ятмыйлар (рәс. 21, *в*).

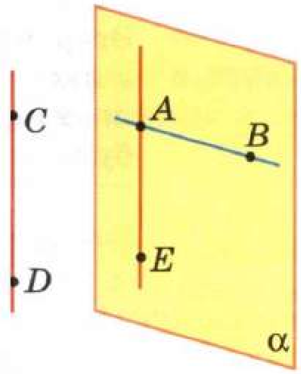
Чалышма турылар турында тагын бер теорема исбатлыйк.

Теорема

Ике чалышма турының һәркайсы аша икенче турыга параллель яссылык үтә һәм бары тик бер генә.

Исбатлау

Чалышма AB һәм CD турыларын тикшерик (рәс. 22). AB турысы аша CD турысына параллель яссылык үтүен һәм ул яссылыкның бер генә икәнен исбатларбыз.



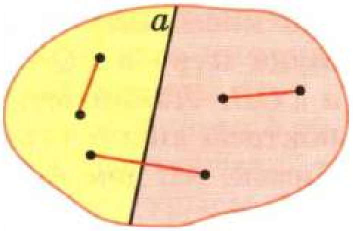
Рәс. 22

A ноктасы аша CD турысына параллель AE турысы үткәрәбез дә AB һәм AE турылары аша үтүче яссылыкны α хәрефе белән тамгалыйбыз. CD турысы α яссылыгында ятмаганга һәм бу яссылыкта яткан AE турысына параллель булганга күрә, CD турысы α яссылыгына параллель.

α — AB турысы аша үтүче һәм CD турысына параллель бердәнбер яссылык икәнлеге ачык аңлашыла. Дөрестән дә, AB турысы аша үтүче теләсә кайсы башка яссылык AE турысы белән кисешә, димәк, аңа параллель булган CD турысы белән дә кисешә. Теорема исбатланды.

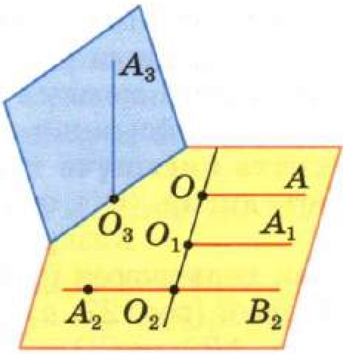
Берсе эстакада буйлап, икенчесе эстакада астыннан үтә торган ике юл бу теореманың күрсәтмәле иллюстрациясе булып хезмәт итә (19 нчы рәс. кара). Астагы юл эстакададагы юлга параллель җир яссылыгында ята. Эстакададагы юл аша да җир яссылыгына параллель, димәк, астагы юлга параллель яссылык үткәнлеге ачык аңлашыла.

8 Яклары бердәй юнәлешле почмаклар



Рәс. 23

Аксиомаларның берсе буенча (2 нче кушымтаны кара), яссылыкта яткан теләсә нинди a турысы шул яссылыкны **ярымъяссылыклар** дип аталган ике кисәккә бүлә (рәс. 23). a турысы бу ярымъяссылыкларның һәркайсының **чиге** дип атала. Бер үк ярымъяссылыкның теләсә нинди ике ноктасы a турысыннан бер якта ята, ә төрле ярымъяссылыкларның ике ноктасы бу турының төрле ягында ята (23 нче рәс. кара).



Рәс. 24

Бер турыда ятмаган OA һәм O_1A_1 нурлары параллель һәм чиге OO_1 булган бер ярымъяссылыкта ятсалар, алар **бердәй юнәлешле** дип атала. Бер турыда яткан OA һәм O_1A_1 нурлары тәңгәл килсәләр яки аларның берсе икенчесен үз эченә алса, алар **бердәй юнәлешле** дип атала. 24 нче рәсемдә OA һәм O_1A_1 нурлары, шулай ук A_2B_2 һәм O_2B_2 нурлары бердәй юнәлешле, ә OA һәм O_2A_2, OA һәм O_3A_3, O_2A_2 һәм O_2B_2 бердәй юнәлешле түгел (ни өчен икәнен аңлатып бирегез).

Теорема

Әгәр ике почмакның яклары тиңдәшле рәвештә бердәй юнәлешле булса, андый почмаклар тигез була.

Исбатлау

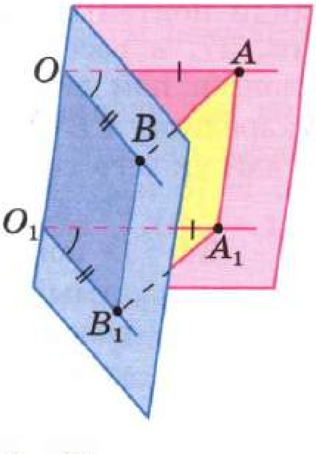
Тиңдәшле яклары бердәй юнәлешле булган O һәм O_1 почмаклары төрле яссылыкларда яткан очракны тикшерербез һәм $\angle O = \angle O_1$ икәнен исбатларбыз.

O почмагының якларында нинди дә булса A һәм B нокталары билгеләп, O_1 почмагының тиңдәшле якларында $OA = O_1A_1$ һәм $OB = O_1B_1$ кисемтәләре алабыз (рәс. 25). OA һәм O_1A_1 бердәй юнәлешле һәм $OA = O_1A_1$ булганлыктан, OAA_1O_1 параллелограмм була, димәк, $AA_1 \parallel OO_1$ һәм $AA_1 = OO_1$. Аналогик рәвештә $BB_1 \parallel OO_1$ һәм $BB_1 = OO_1$. Моннан $AA_1 \parallel BB_1$ һәм $AA_1 = BB_1$ икәнлеге килеп чыга, димәк, ABB_1A_1 — параллелограмм һәм $AB = A_1B_1$.

Хәзер AOB һәм $A_1O_1B_1$ өчпочмакларын чагыштырабыз. Алар өч ягы буенча тигез, шуңа күрә $\angle O = \angle O_1$. Теорема исбатланды.

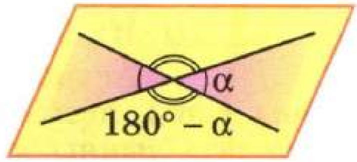
▼ **Искәрмә**

Исбатлаганда без, ачыкламый гына, AB һәм A_1B_1 кисемтәләре кисешмиләр дип алып файдаландык (шулай булмаганда ABB_1A_1 фигурасы түгел, ә AB_1BA_1 параллелограмм булыр иде). Моны исбатлыйк. AB һәм A_1B_1 кисемтәләре кисешәләр дип уйлыйк. Ул вакытта AOB һәм $A_1O_1B_1$ яссылыклары нинди дә a турысы буй-



Рәс. 25

лап кисешәләр. $OA \parallel O_1A_1$ булганлыктан, $OA \parallel A_1O_1B_1$, шуңа күрә $a \parallel OA$ (п. 6 ны кара). Аналогик рәвештә $a \parallel OB$. Ләкин моның булуы мөмкин түгел, чөнки O ноктасы аша a турысына параллель бер генә туры үтә. Димәк, AB һәм A_1B_1 кисемтәләре кисешмиләр.



Рәс. 26

9 Турылар арасындагы почмаклар

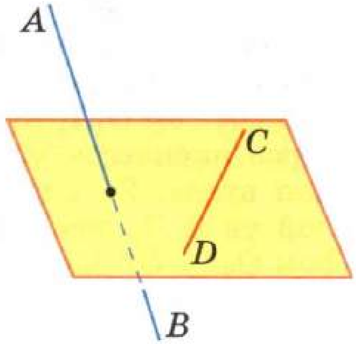
Теләсә нинди кисешүче ике туры бер яссылыкта ята һәм дүрт җәелмәгән почмак төзи. Әгәр бу почмакларның берсе билгеле булса, калган өч почмакны да табарга мөмкин (рәс. 26). α — калган өч почмакның теләсә кайсыннан зур булмаган почмак булсын. Ул вакытта **кисешүче турылар арасындагы почмак α га тигез**, диләр. $0° < \alpha \leqslant 90°$ икәнлеге ачык.

Хәзер чалышма турылар арасындагы почмак төшенчәсен бирик. AB һәм CD — ике чалышма туры булсын (рәс. 27, *а*). Ирекле рәвештә алынган M_1 ноктасы аша, AB һәм CD турыларына тиңдәшле рәвештә параллель итеп, A_1B_1 һәм C_1D_1 турылары үткәрәбез (рәс. 27, *б*).

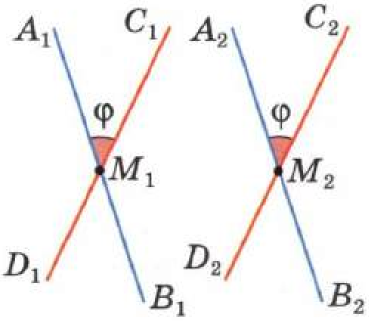
Әгәр A_1B_1 һәм C_1D_1 турылары арасындагы почмак φ гә тигез булса, ул вакытта **AB һәм CD чалышма турылары арасындагы почмак φ гә тигез**, диярбез.

Чалышма турылар арасындагы почмак M_1 ноктасын кайда алуга бәйле түгел икәнен исбатлыйк. Теләсә нинди M_2 ноктасы алып, аның аша AB һәм CD турыларына тиңдәшле рәвештә параллель A_2B_2 һәм C_2D_2 турылары үткәрәбез (рәс. 27, *б*). $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $C_1D_1 \parallel C_2D_2$ булганлыктан, түбәләре M_1 һәм M_2 булган почмакларның яклары пар-пар бердәй юнәлешле (27, *б* рәсемендә $\angle A_1M_1C_1$ һәм $\angle A_2M_2C_2$, $\angle A_1M_1D_1$ һәм $\angle A_2M_2D_2$ һ. б. шундый почмаклар була). Шуңа күрә бу почмаклар тиңдәшле рәвештә тигез. Моннан A_2B_2 һәм C_2D_2 турылары арасындагы почмак шулай ук φ гә тигез.

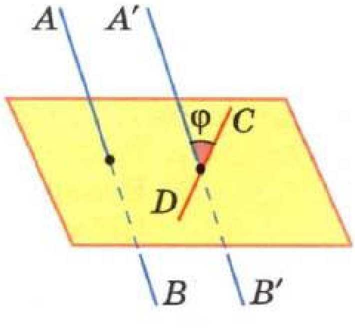
Чалышма турыларның берсендәге теләсә нинди ноктаны M_1 ноктасы сыйфатында алырга мөмкин. 27, *в* рәсемендә CD турысында M ноктасы билгеләнгән һәм аның аша AB га параллель $A'B'$ турысы үткәрелгән. $A'B'$ һәм CD турылары арасындагы почмак шулай ук φ гә тигез.



а)



б)



в)

Рәс. 27

Сораулар һәм мәсьәләләр

34 D ноктасы ABC өчпочмагы яссылыгында ятмый, M, N һәм P нокталары — тиңдәшле рәвештә DA, DB һәм DC кисемтәләренең урталары, K ноктасы BN кисемтәсендә ята. а) ND һәм AB; б) PK һәм BC; в) MN һәм AB; г) MP һәм AC; д) KN һәм AC; е) MD һәм BC турыларының үзара торышын ачыклагыз.

35 a турысында ятмаган M ноктасы аша a турысы белән уртак нокталары булмаган ике туры үткәрелгән. Бу турыларның кимендә берсе һәм a турысы чалышма турылар икәнен исбатлагыз.

36 c турысы a турысын кисә һәм a турысына параллель булган b турысын кисми. b һәм c чалышма турылар икәнен исбатлагыз.

37 m турысы ABC өчпочмагының AB ягын кисә. а) m турысы ABC яссылыгында ятса һәм AC кисемтәсе белән уртак нокталары булмаса; б) m турысы ABC яссылыгында ятмаса, m һәм BC турылары үзара ничек урнашкан?

38 $ABCD$ ромбының A түбәсе аша BD диагоналенә параллель итеп — a турысы, ә C түбәсе аша ромб яссылыгында ятмаган b турысы үткәрелгән. а) a һәм CD турыларының кисешкәнен; б) a һәм b чалышма турылар икәнен исбатлагыз.

39 AB һәм CD чалышма турылар булса, ул вакытта AD һәм BC ның шулай ук чалышма турылар икәнен исбатлагыз.

40 a һәм b чалышма турыларында тиндәшле рәвештә M һәм N нокталары билгеләнгән. a турысы һәм N ноктасы аша — α яссылыгы, ә b турысы һәм M ноктасы аша β яссылыгы үткәрелгән. а) b турысы α яссылыгында ятамы? б) α һәм β яссылыклары кисешәләрме? Җавап уңай булганда, аларның кисешү турысын күрсәтегез.

41 Ике чалышма турының һәркайсы өченче турыга параллель булуы мөмкинме? Җавабыгызны нигезләгез.

42 Бер яссылыкта ятмаган $ABCD$ параллелограммы һәм EK нигезе булган $ABEK$ трапециясе бирелгән. а) CD һәм EK турыларының үзара торышын ачыклагыз. б) Трапециягә әйләнә камарга мөмкин һәм $AB = 22{,}5$ см, $EK = 27{,}5$ см булса, аның периметрын табыгыз.

43 Пространство дүртпочмагы* якларының урталары параллелограмм түбәләре икәнен исбатлагыз.

44 OB һәм CD турылары параллель, ә OA һәм CD — чалышма турылар. а) $\angle AOB = 40°$; б) $\angle AOB = 135°$; в) $\angle AOB = 90°$ булса, OA һәм CD турылары арасындагы почмакны табыгыз.

45 a турысы $ABCD$ параллелограммының BC ягына параллель һәм аның яссылыгында ятмый. a һәм CD ның чалышма турылар икәнен исбатлагыз һәм параллелограммның бер почмагы: а) $50°$; б) $121°$ ка тигез булса, чалышма турылар арасындагы почмакны табыгыз.

46 m турысы $ABCD$ ромбының BD диагоналенә параллель һәм ромб яссылыгында ятмый. а) m һәм AC — чалышма турылар икәнен исбатлагыз һәм алар арасындагы почмакны табыгыз; б) m һәм AD ның чалышма турылар икәнен исбатлагыз һәм $\angle ABC = 128°$ булса, алар арасындагы почмакны табыгыз.

47 $ABCD$ пространство дүртпочмагының AB һәм CD яклары тигез. AB һәм CD турылары BC һәм AD кисемтәләренең урталары аша үтүче туры белән тигез почмаклар төзегәнен исбатлагыз.

---

* Дүртпочмакның түбәләре бер яссылыкта ятмаса, ул **пространство дүртпочмагы** дип атала.

§3 Яссылыкларның параллельлеге

10 Параллель яссылыклар

Әгәр ике яссылыкның уртак ноктасы булса, аларның уртак туры буйлап кисешкәнен беләбез (A_3 аксиомасы). Моннан **ике яссылыкның я туры буйлап кисешүе** (рәс. 28, *а*), **я кисешмәве, ягъни бер уртак ноктасы да юклыгы** килеп чыга (рәс. 28, *б*).

Билгеләмә

Ике яссылык кисешмәсә, алар **параллель** дип атала.

Бүлмәнең идәне һәм түшәме, капма-каршы ике стенасы, өстәл яссылыгы һәм идән яссылыгы параллель яссылыкларны күзалларга мөмкинлек бирә.

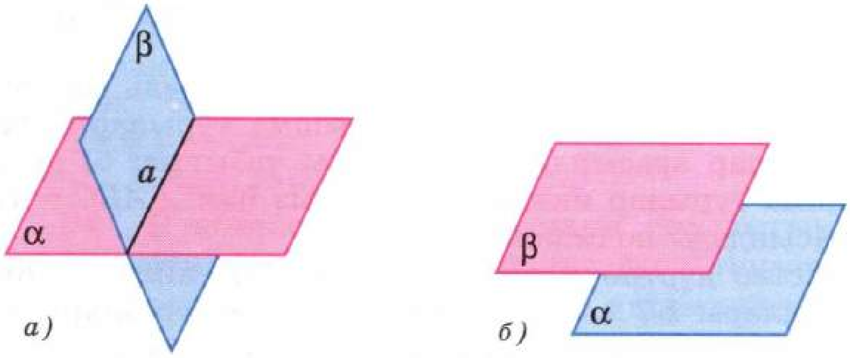
α һәм β яссылыкларының параллельлеге болай тамгалана: $\alpha \parallel \beta$. Ике яссылыкның параллельлек билгесен тикшерик.

Теорема

Әгәр бер яссылыктагы кисешүче ике туры икенче яссылыктагы кисешүче ике турыга тиңдәшле рәвештә параллель булса, ул вакытта бу яссылыклар параллель була.

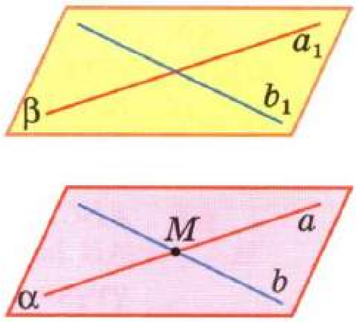
Исбатлау

α һәм β яссылыкларын карыйк (рәс. 29). α яссылыгында — M ноктасында кисешүче a һәм b турылары, ә β яссылыгында a_1 һәм b_1 турылары ята, өстәвенә $a \parallel a_1$ һәм $b \parallel b_1$. $\alpha \parallel \beta$ икәнен исбатларбыз. Барыннан да элек, туры һәм яссылыкның параллельлек билгесе буенча $a \parallel \beta$ һәм $b \parallel \beta$ икәнен билгеләп үтәбез.



α һәм β яссылыклары кисешәләр　　α һәм β яссылыклары параллель

Рәс. 28



Рәс. 29

α һәм β яссылыклары параллель түгел дип фараз итик. Ул вакытта алар ниндидер c турысы буенча кисешәләр. Без, α яссылыгының β яссылыгына параллель a турысы аша үтеп, β яссылыгын c турысы буенча кисүен таптык. Моннан (п. 6, 1° үзлеге буенча) $a \parallel c$ икәнлеге килеп чыга.

Ләкин α яссылыгы шулай ук β яссылыгына параллель b турысы аша да үтә. Шуңа күрә $b \parallel c$. Шул рәвешле, M ноктасы аша c турысына параллель ике туры (a һәм b) үткәнлеге килеп чыга. Ләкин моның булуы мөмкин түгел, чөнки параллель турылар турындагы теорема буенча M ноктасы аша c турысына параллель бер генә туры үтә. Димәк, безнең фаразыбыз дөрес түгел һәм $\alpha \parallel \beta$. Теорема исбатланды.

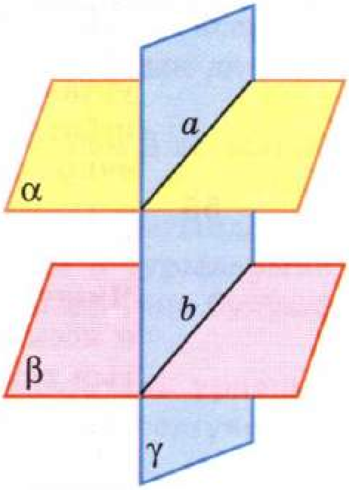
11 Параллель яссылыкларның үзлекләре

Параллель яссылыкларның ике үзлеген тикшерик.

1°. Әгәр ике параллель яссылык өченчесе белән кистерелсә, ул вакытта аларның кисешү сызыклары параллель.

Бүлмә идәненең һәм түшәменең стена белән кисешү сызыклары бу фактның ачык расламасы булып хезмәт итә — бу сызыклар параллель.

Бирелгән үзлекне исбатлау өчен, α һәм β параллель яссылыкларының γ яссылыгы белән кисешү сызыгы булган a һәм b турыларын тикшерербез (рәс. 30). $a \parallel b$ икәнен исбатлыйк. Бу турылар бер яссылыкта ята (γ яссылыгында) һәм кисешмиләр. Дөрестән дә, әгәр a һәм b турылары кисешсәләр, α һәм β яссылыкларының уртак ноктасы булыр иде, ә моның булуы мөмкин түгел, чөнки бу яссылыклар параллель.

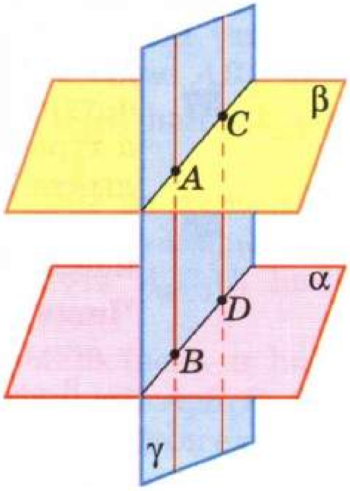


Рәс. 30

Шулай итеп, a һәм b турылары бер яссылыкта яталар һәм кисешмиләр, ягъни $a \parallel b$.

2°. Параллель турыларның параллель яссылыклар арасында урнашкан кисемтәләре тигез.

Бу үзлекне исбатлау өчен, ике параллель турының α һәм β параллель яссылыклары арасында урнашкан AB һәм CD кисемтәләрен тикшербез (рәс. 31). $AB = CD$ икәнен исбатлыйк. Параллель AB һәм CD турылары аша үтүче γ яссылыгы α һәм β яссылыклары белән параллель AC һәм BD турылары буенча кисешә (1° үзлеге). Шулай итеп, $ABDC$ дүртпочмагының капма-каршы яклары пар-пар параллель, ягъни $ABDC$ — параллелограмм. Ләкин параллелограммда капма-каршы яклар тигез, шуңа күрә AB һәм CD кисемтәләре тигез.



Рәс. 31

Сораулар һәм мәсьәләләр

48 Бүлмәдәге әйберләрдән файдаланып, параллель яссылыкларның модельләрен күрсәтегез.

49 m турысы α яссылыгын B ноктасында кисеп үтә. m турысы аша үтүче һәм α яссылыгына параллель яссылык бармы?

50 α һәм β яссылыклары параллель, m турысы α яссылыгында ята. m турысы β яссылыгына параллель икәнен исбатлагыз.

51 α яссылыгындагы кисешүче m һәм n турылары β яссылыгына параллель булса, α һәм β яссылыкларының параллель икәнен исбатлагыз.

52 Өчпочмакның ике ягы α яссылыгына параллель. Өчпочмакның өченче ягы да α яссылыгына параллель икәнен исбатлагыз.

53 Бер яссылыкта ятмаган өч кисемтә: A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 уртак уртага ия. $A_1B_1C_1$ һәм $A_2B_2C_2$ яссылыкларының параллель икәнен исбатлагыз.

54 B ноктасы ADC өчпочмагы яссылыгында ятмый, M, N һәм P ноктлары — тиңдәшле рәвештә BA, BC һәм BD кисемтәләренең урталары. а) MNP һәм ADC яссылыкларының параллель икәнен исбатлагыз. б) ADC өчпочмагының мәйданы 48 см^2 булса, MNP өчпочмагының мәйданын табыгыз.

55 a турысы α яссылыгын кисеп үтсә, ул α яссылыгына параллель булган теләсә нинди яссылыкны да кисеп үткәнен исбатлагыз.

Чишү

α яссылыгына параллель итеп ирекле рәвештә алынган β яссылыгын тикшерәбез. β яссылыгының нинди дә булса B ноктасы аша a турысына параллель b турысы үткәрәбез. a турысы α яссылыгын кискәнгә күрә, b турысы да бу яссылыкны кисәр. Шулай булгач, b турысы β яссылыгын кисә (анда ятмый). Шуңа күрә a турысы да β яссылыгын кисә.

56 α һәм β яссылыклары параллель, A — α яссылыгы ноктасы. A ноктасы аша үткән һәм β яссылыгына параллель булган теләсә нинди туры α яссылыгында ятканын исбатлагыз.

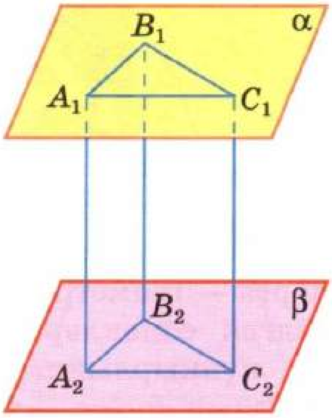
57 a турысы үзара параллель ике яссылыкның берсенә параллель. a турысының икенче яссылыкка я параллель икәнен, я шул яссылыкта ятканын исбатлагыз.

58 Әгәр γ яссылыгы параллель α һәм β яссылыкларының берсен киссә, ул вакытта икенче яссылыкны да кискәнен исбатлагыз.

Чишү

γ яссылыгы α яссылыгын a турысы буенча киссен, ди. γ яссылыгы β яссылыгын да кискәнен исбатларбыз. γ яссылыгында a турысын кисүче b турысы үткәрик. b турысы α яссылыгын кисә, шуңа күрә ул аңа параллель β яссылыгын да кисә (55 нче мәсьәлә). Шулай булгач, b турысы яткан γ яссылыгы да β яссылыгын кисә.

59 α яссылыгында ятмаган A ноктасы аша α яссылыгына параллель яссылык үткәнен һәм аның бары тик бер генә булуын исбатлагыз.



Рәс. 32

Чишү

α яссылыгында кисешүче a һәм b турылары үткәрәбез, ә A ноктасы аша, тиңдәшле рәвештә a һәм b турыларына параллель итеп, a_1 һәм b_1 турылары үткәрәбез. a_1 һәм b_1 турылары аша үтүче β яссылыгын тикшерик. β — эзләнелгән яссылык, чөнки ул A ноктасы аша үтә һәм ике яссылыкның параллельлек билгесе буенча α яссылыгына параллель.

Хәзер β яссылыгының A ноктасы аша үтүче һәм α яссылыгына параллель бердәнбер яссылык икәнен исбатларбыз. Дөрестән дә, A ноктасы аша үтүче башка теләсә нинди яссылык β яссылыгын кисә, шуңа күрә аңа параллель булган α яссылыгын да кисә (58 нче мәсьәлә).

60 α һәм β яссылыклары γ яссылыгына параллель. α һәм β яссылыкларының параллель икәнен исбатлагыз.

61 Кисешүче a һәм b турылары һәм бу турылар яссылыгында ятмаган A ноктасы бирелгән. A ноктасы аша a һәм b турыларына параллель яссылык үткәнен һәм аның бары тик бер генә булуын исбатлагыз.

62 Почмак үлчәгеч инструментларда дискның горизонталь урнашу-урнашмавын тикшерү өчен, диск яссылыгында кисешүче турыларда урнашкан ике тигезләгечтән файдаланалар. Ни өчен тигезләгечләрне параллель турыларда урнаштырмыйлар?

63 α һәм β параллель яссылыклары BAC почмагының AB ягын — тиңдәшле рәвештә A_1 һәм A_2 нокталарында, ә бу почмакның AC ягын тиңдәшле рәвештә B_1 һәм B_2 нокталарында кисеп үтәләр. а) $A_1A_2 = 2A_1A = 12$ см, $AB_1 = 5$ см булса, AA_2 һәм AB_2 не; б) $A_1B_1 = 18$ см, $AA_1 = 24$ см, $AA_2 = \frac{3}{2}A_1A_2$ булса, A_2B_2 һәм AA_2 не табыгыз.

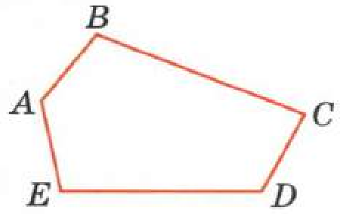
64 Бер нокта аша үтүче һәм бер яссылыкта ятмаучы өч туры параллель яссылыкларның берсен — A_1, B_1 һәм C_1 нокталарында, ә икенчесен A_2, B_2 һәм C_2 нокталарында кисеп үтә. $A_1B_1C_1$ һәм $A_2B_2C_2$ өчпочмакларының охшаш икәнен исбатлагыз.

65 Параллель A_1A_2, B_1B_2 һәм C_1C_2 кисемтәләре параллель α һәм β яссылыклары арасында урнашканнар (рәс. 32). а) $A_1B_1B_2A_2$, $B_1C_1C_2B_2$ һәм $A_1C_1C_2A_2$ дүртпочмакларының төрен билгеләгез. б) $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta A_2B_2C_2$ икәнен исбатлагыз.

§ 4 Тетраэдр һәм параллелепипед

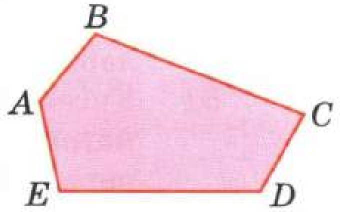
12 Тетраэдр

Безнең курсның бер бүлеге күпкырлыкларга — геометрик җисемнәрнең күппочмаклардан төзелгән өслекләренә багышланыр. Ләкин инде хәзер үк, күпкырлыкларны җентекләп өйрәнгәнгә кадәр, без аларның икесе — **тетраэдр** һәм **параллелепипед** белән танышырбыз. Бу безгә туры һәм яссылыкларның үзара урнашуы белән бәйле төшенчәләрне ике мөһим геометрик җисем мисалында аңлатырга мөмкинлек бирер.



а)

ABCDE күппочмагы — кисемтәләрдән төзелгән фигура



б)

ABCDE күппочмагы яссылыкның *ABCDE* сызыгы белән чикләнгән кисәге

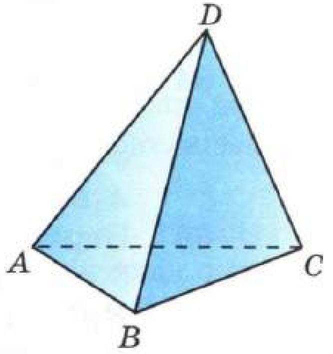
Рәс. 33

Тетраэдр һәм параллелепипед төшенчәләрен биргәнгә кадәр планиметриядә күппочмак дигәннән нәрсәне аңлавыбызны искә төшерик. Күппочмакны без я үз-үзен кисми торган кисемтәләрдән төзелгән йомык сынык сызык буларак (рәс. 33, *а*), я яссылыкның, сызыкның үзен дә кертеп, шул сызык белән чикләнгән кисәге буларак карадык (рәс. 33, *б*). Пространствода өслекләрне һәм җисемнәрне караганда, күппочмакның икенче аңлатмасыннан файдаланырбыз. Мондый аңлатма биргәндә, пространствода теләсә нинди күппочмак яссы өслек буларак күзаллана.

Хәзер тетраэдрга билгеләмә бирик.

Теләсә нинди ABC өчпочмагын һәм бу өчпочмак яссылыгында ятмаган D ноктасын карыйк. D ноктасын кисемтәләр ярдәмендә ABC өчпочмагының түбәләре белән тоташтырып, DAB, DBC һәм DCA өчпочмакларын табарбыз. Дүрт өчпочмак: ABC, DAB, DBC һәм DCA дан төзелгән өслек **тетраэдр** дип атала һәм болай тамгалана: $DABC$ (рәс. 34).

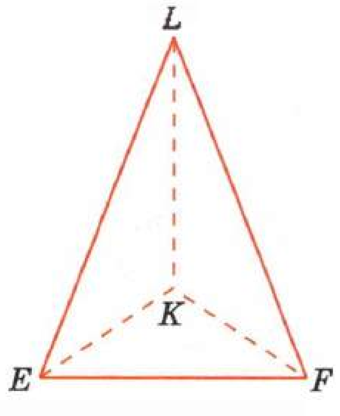
Тетраэдрны төзүче өчпочмаклар — **кырлар**, аларның яклары — **кабыргалар**, ә түбәләре **тетраэдрның түбәләре** дип атала. Тетраэдрның дүрт кыры, алты кабыргасы һәм дүрт түбәсе бар. Тетраэдрның уртак түбәләре булмаган ике кабыргасы **капма-каршы кабыргалар** дип атала. 34 нче рәсемдә AD һәм BC, BD һәм AC, CD һәм AB — капма-каршы кабыргалар. Кайвакыт тетраэдрның бер кырын аерып күрсәтеп, аны **нигезе** дип, ә калган өчесен **ян кырлары** дип атыйлар.



Рәс. 34

Тетраэдр, гадәттә, 34 нче һәм 35 нче рәсемнәрдә күрсәтелгәнчә, ягъни диагональләре дә сызылган кабарынкы яки кабарынкы булмаган дүртпочмак

рәвешендә сурәтләнә. Рәсемдә күренми торган кабыргалар өзекле сызыклар белән сурәтләнгән. 34 нче рәсемдә — AC кабыргасы гына, ә 35 нче рәсемдә EK, KF һәм KL кабыргалары күренми.



Рәс. 35

13 Параллелепипед

Параллель яссылыкларда AA_1, BB_1, CC_1 һәм DD_1 кисемтәләрен параллель булырлык итеп урнашкан тигез $ABCD$ һәм $A_1B_1C_1D_1$ параллелограммнарын карыйк (рәс. 36, *а*).

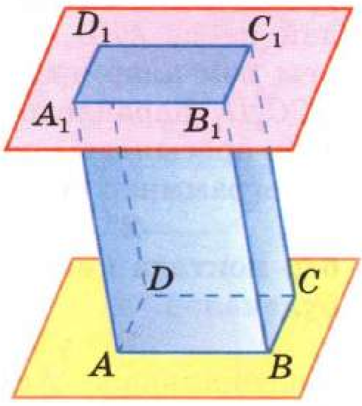
$$ABB_1A_1,\ BCC_1B_1,\ CDD_1C_1,\ DAA_1D_1 \qquad (1)$$

дүртпочмаклары шулай ук параллелограммнар була, чөнки аларның һәркайсы берәр пар параллель капма-каршы якка ия, мәсәлән, ABB_1A_1 дүртпочмагында AA_1 һәм BB_1 яклары — шарт буенча параллель, ә AB һәм A_1B_1 яклары — ике параллель яссылыкны өченчесе белән кистергәндә кисешү сызыкларының үзлеге буенча параллель (п. 11, 1° үзлеге). Тигез $ABCD$ һәм $A_1B_1C_1D_1$ параллелограммнарыннан һәм дүрт (1) параллелограммнарыннан төзелгән өслек **параллелепипед** дип атала, һәм ул болай тамгалана: $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

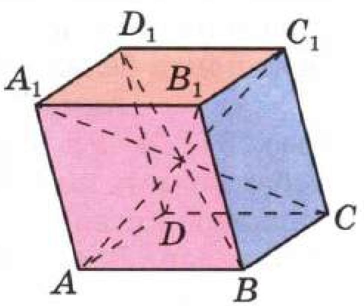
Параллелепипедны төзүче параллелограммнар — **кырлар**, аларның яклары — **кабыргалар**, ә параллелограммнарның түбәләре **параллелепипедның түбәләре** дип атала. Параллелепипедның алты кыры, унике кабыргасы, сигез түбәсе бар. Параллелепипедның уртак кабыргага ия ике кыры **чиктәш кырлар** дип, ә кабыргалары уртак булмаган кырлары **капма-каршы кырлар** дип атала. 36, *б* рәсемендә $ABCD$ һәм $A_1B_1C_1D_1$, ABB_1A_1 һәм DCC_1D_1, ADD_1A_1 һәм BCC_1B_1 капма-каршы кырлар була. Бер кырда ятмаган ике түбәсе **капма-каршы түбәләр** дип атала. Капма-каршы түбәләрне тоташтыручы кисемтә **параллелепипедның диагонале** дип атала. Һәр параллелепипед дүрт диагональгә ия. 36, *б* рәсемендә AC_1, BD_1, CA_1 һәм DB_1 кисемтәләре диагональләр була.

Еш кына кайсы да булса ике капма-каршы кырны **параллелепипедның нигезләре** дип, ә калган кырларны аның **ян кырлары** дип атыйлар. Параллелепипедның нигезләрендә ятмаган кабыргалары **ян кабыргалар** дип атала. Әйтик, $ABCD$ һәм $A_1B_1C_1D_1$ кырларын нигезләре дип алсак, (1) параллелограммнары — ян кырлар, ә AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 кисемтәләре ян кабыргалар булыр.

Параллелепипед, гадәттә, 36, *б* рәсемендә күрсәтелгәнчә сурәтләнә. Бу вакытта кырларның сурәт-



а)



б)

Параллелепипед

Рәс. 36

ләре параллелограммнар була; күренми торган кабыргалар һәм башка кисемтәләр, мәсәлән диагональләр, өзекле нәзек сызыклар белән сурәтләнә*.

Параллелепипедның ике үзлеген карап китик.

1°. Параллелепипедның капма-каршы кырлары параллель ** **һәм тигез.**

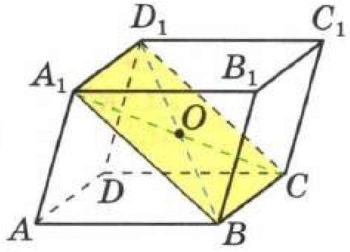
Мәсәлән, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедында ABB_1A_1 һәм DCC_1D_1 кырларының параллель һәм тигез икәнен исбатлыйк (рәс. 37, *а*). $ABCD$ һәм ADD_1A_1 — параллелограммнар булганга күрә, $AB \parallel DC$ һәм $AA_1 \parallel DD_1$. Шулай итеп, бер кырның кисешүче AB һәм AA_1 турылары тиңдәшле рәвештә икенче кырның CD һәм DD_1 турыларына параллель. Моннан яссылыкларның параллельлек билгесе буенча ABB_1A_1 һәм DCC_1D_1 кырларының параллель икәнлеге килеп чыга.

Хәзер бу кырларның тигез икәнен исбатлыйк. Параллелепипедның барлык кырлары да параллелограммнар булганга, $AB = DC$ һәм $AA_1 = DD_1$. Шул ук сәбәп буенча A_1AB һәм D_1DC почмакларының яклары бердәй юнәлешле, димәк, бу почмаклар тигез. Шулай итеп, ABB_1A_1 параллелограммының чиктәш ике ягы һәм алар арасындагы почмагы тиңдәшле рәвештә DCC_1D_1 параллелограммының чиктәш ике ягына һәм алар арасындагы почмагына тигез, шуңа күрә бу параллелограммнар тигез.

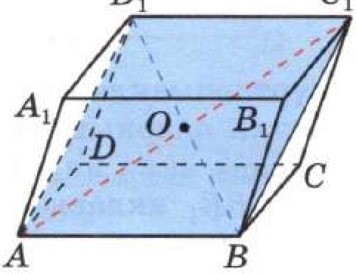
2°. Параллелепипедның диагональләре бер ноктада кисешәләр һәм шул нокта белән урталай бүленәләр.

Бу үзлекне исбатлау өчен, A_1C һәм D_1B диагональләре $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедының диагональләре булган A_1D_1CB дүртпочмагын тикшерик (рәс. 37, *а*). $A_1D_1 \parallel BC$ һәм $A_1D_1 = BC$ булганлыктан, A_1D_1CB — параллелограмм. Шуңа күрә A_1C һәм D_1B диагональләре кайсыдыр O ноктасында кисешәләр һәм шул нокта белән урталай бүленәләр.

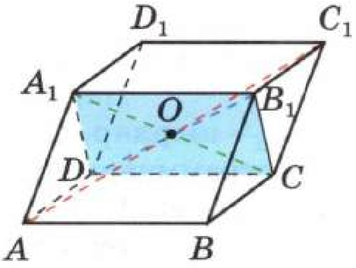
Аннары AD_1C_1B дүртпочмагын тикшерербез (рәс. 37, *б*). Ул шулай ук параллелограмм була (моны исбатлагыз), шулай булгач, аның AC_1 һәм D_1B диагональләре кисешәләр һәм кисешү ноктасы белән урталай бүленәләр. Ләкин D_1B диагоналенең уртасы O ноктасы



а)



б)



в)

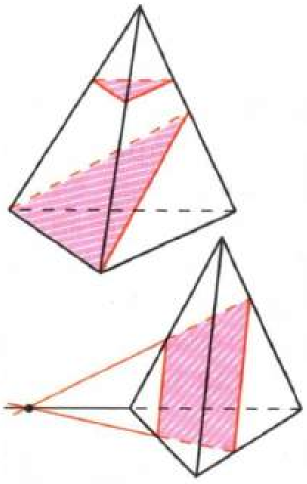
Рәс. 37

* Пространство фигураларын, атап әйткәндә параллелепипедны, яссылыкта сурәтләү турында 1 нче кушымтада җентекләп аңлатылган.

** Параллелепипедның ике кыры параллель яссылыкларда ятса, алар **параллель** дип атала.

була. Шул рәвешле, A_1C, D_1B һәм AC_1 диагональләре O ноктасында кисешәләр һәм шул нокта белән урталай бүленәләр.

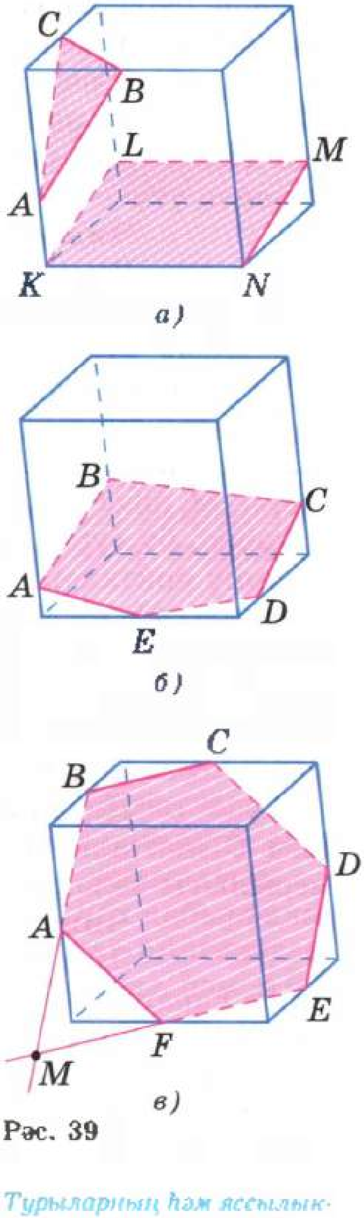
Ниһаять, A_1B_1CD дүртпочмагын тикшереп (рәс. 37, *в*), параллелепипедның дүртенче диагонале DB_1 нең шулай ук O ноктасы аша үткәнен һәм аның белән урталай бүленгәнен ачыклыйбыз.



Рәс. 38

14 Кисемнәрне төзүгә мәсьәләләр

Тетраэдр һәм параллелепипедка бәйле күп кенә геометрик мәсьәләләрне чишү өчен, рәсемдә аларның төрле яссылыклар белән **кисемнәрен** төзи белү файдалы. Тетраэдр яки параллелепипедның кисеме дигәннән нәрсә аңларга кирәклеген ачыклыйк. Ике ягында да бирелгән тетраэдрның (параллелепипедның) ноктлары булган теләсә нинди яссылык әлеге тетраэдрны (параллелепипедны) **кисүче яссылык** дип атала. Кисүче яссылык тетраэдрның (параллелепипедның) кырларын кисемтәләр буенча кисеп үтә. Бу кисемтәләр яклары булган күппочмак **тетраэдрның (параллелепипедның) кисеме** дип атала. Тетраэдрның дүрт кыры булганга күрә, аның кисемнәре бары тик өчпочмаклар һәм дүртпочмаклар гына була ала (рәс. 38). Параллелепипедның алты кыры бар. Аның кисемнәре өчпочмак, дүртпочмак (рәс. 39, *а*), бишпочмак (рәс. 39, *б*) һәм алтыпочмак (рәс. 39, *в*) булуы мөмкин.



Рәс. 39

Рәсемдә параллелепипедның кисемнәрен төзегәндә түбәндәге фактларны искә алырга кирәк: кисүче яссылык нинди дә булса кисемтәләр буенча ике капма-каршы кырын киссә, бу кисемтәләр параллель (п. 11, 1° үзлеге). Мәсәлән, 39, *б* рәсемендә кисүче яссылык ике капма-каршы кырны (сул һәм уң) AB һәм CD кисемтәләре буйлап, ә башка ике капма-каршы кырны (алгы һәм арткы) AE һәм BC кисемтәләре буйлап кисә, шуңа күрә $AB \parallel CD$ һәм $AE \parallel BC$. 39, *в* рәсемендә шул ук сәбәп буенча $AB \parallel ED$, $AF \parallel CD$, $BC \parallel EF$. Шулай ук кисемне төзү өчен, кисүче яссылыкның тетраэдр (параллелепипед) кабыргалары белән кисешү ноктасын төзү җиткәнен билгеләп үтәбез. Шуннан соң бер үк кырда төзелгән һәр ике ноктаны тоташтыручы кисемтәләр үткәрәсе генә кала.

Тетраэдр һәм параллелепипедның төрле кисемнәрен төзүгә мисаллар карыйк.

1 нче мәсьәлә

$ABCD$ тетраэдрының AB, BD һәм CD кабыргаларында M, N һәм P нокталары билгеләнгән (рәс. 40, *а*). Тетраэдрның MNP яссылыгы белән кисемен төзергә.

Чишү

Башта MNP яссылыгының ABC кыры яссылыгы белән кисешү турысын төзибез. M ноктасы бу яссылыкларның уртак ноктасы була. Тагын бер уртак ноктаны төзү өчен, NP һәм BC кисемтәләрен E ноктасында кисешкәнгә кадәр дәвам итәбез (рәс. 40, *б*), бу MNP һәм ABC яссылыкларының икенче уртак ноктасы булыр да. Димәк, бу яссылыклар ME турысы буйлап кисешәләр. ME турысы AC кабыргасын ниндидер Q ноктасында кисә. $MNPQ$ дүртпочмагы — эзләнелгән кисем.

Әгәр NP һәм BC турылары параллель булса (рәс. 40, *в*), NP турысы ABC кырына параллель, шуңа күрә MNP яссылыгы бу кырны NP турысына параллель булган ME' турысы буйлап кисеп үтә. Q ноктасы, беренче очрактагы кебек үк, AC кабыргасының ME' турысы белән кисешү ноктасы була.

2 нче мәсьәлә

M ноктасы $DABC$ тетраэдрының ADB ян кырында ята (рәс. 41, *а*). M ноктасы аша ABC нигезенә параллель үтүче яссылык белән тетраэдр кисемен төзегез.

Чишү

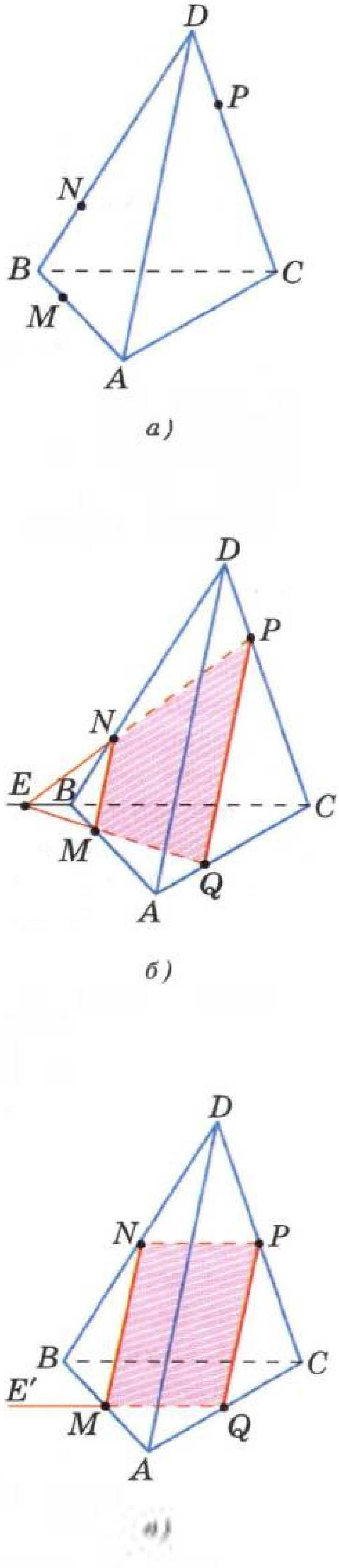
Кисүче яссылык ABC яссылыгына параллель булганлыктан, ул AB, BC һәм CA турыларына параллель була. Шулай булгач, кисүче яссылык тетраэдрның ян кырларын ABC өчпочмагының якларына параллель булган турылар буйлап кисеп үтәр. Моннан эзләнелгән кисемне төзүнең түбәндәге ысулы килеп чыга. M ноктасы аша AB кисемтәсенә параллель туры үткәреп, бу турының DA һәм DB ян кабыргалары белән кисешү нокталарын P һәм Q хәрефләре белән тамгалыйбыз (рәс. 41, *б*). Аннары P ноктасы аша AC кисемтәсенә параллель туры үткәреп, бу турының DC кабыргасы белән кисешү ноктасын R хәрефе белән тамгалыйбыз. PQR өчпочмагы — эзләнелгән кисем.

3 нче мәсьәлә

Параллелепипедның кабыргаларында A, B һәм C нокталары бирелгән. Параллелепипедның ABC яссылыгы белән кисемен төзергә.

Чишү

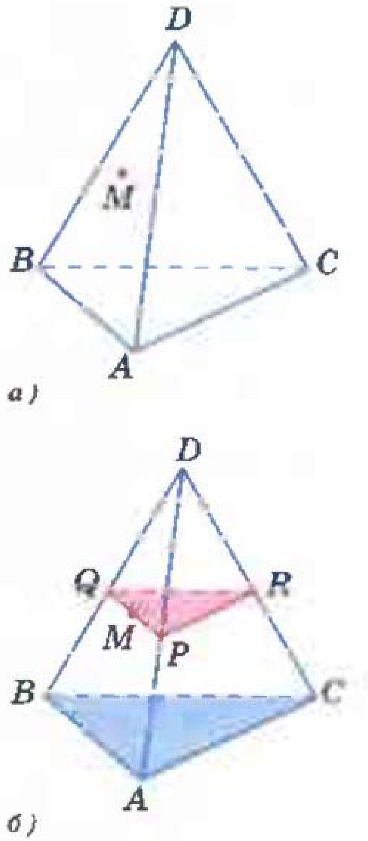
Эзләнелгән кисемне төзү A, B һәм C нокталары параллелепипедның кайсы кабыргаларында ятуга бәйле. Бу нокталар бер түбәдән чыгучы кабыргаларда яткан иң гади очракта (рәс. 39, *а*) AB, BC һәм CA кисемтәләрен үткәрергә кирәк һәм эзләнелгән кисем — ABC өчпочмагы килеп чыгар. Әгәр бирелгән A, B һәм



Рәс. 40

C нокталары 39, *б* рәсемендә күрсәтелгәнчә урнашкан булса, башта *AB* һәм *BC* кисемтәләрен үткәрергә, аннары *A* ноктасы аша — *BC* га параллель туры, ә *C* ноктасы аша *AB* га параллель туры үткәрергә кирәк. Бу турыларның аскы кырның кабыргалары белән кисешүе *E* һәм *D* нокталарын бирә. *ED* кисемтәсен үткәрсәк, эзләнелгән кисем — *ABCDE* бишпочмагы төзелер.

Бирелгән *A*, *B* һәм *C* нокталары 39, *в* рәсемендә күрсәтелгәнчә урнашканда, тагын да авыррак очрак булып тора. Әлеге очракта болай эшләргә мөмкин. Башта кисүче яссылыкның аскы нигез яссылыгы белән кисешү турысын төзибез. Моның өчен *AB* турысын үткәрәбез дә *AB* турысы яткан кырның аскы нигезен бу туры белән *M* ноктасында кисешкәнгә кадәр дәвам итәбез. Аннары *M* ноктасы аша *BC* турысына параллель туры үткәрәбез. Бу туры кисүче яссылыкның аскы нигез яссылыгы белән кисешү турысы була да. Әлеге туры аскы нигез кабыргалары белән *E* һәм *F* нокталарында кисешә. Аннары *E* ноктасы аша *AB* турысына параллель туры үткәреп, *D* ноктасын табабыз. Ниһаять, *AF* һәм *CD* кисемтәләрен үткәрәбез, һәм эзләнелгән кисем — *ABCDEF* алтыпочмагы төзелде.



Рәс. 41

Мәсьәләләр

66 *ABCD* тетраэдрында чалышма (ягъни чалышма турыларда яткан) кабыргаларның парларын атап китегез. Тетраэдрның шундый ничә пар кабыргасы бар?

67 *DABC* тетраэдрында $\angle ADB = 54°$, $\angle BDC = 72°$, $\angle CDA = 90°$, $DA = 20$ см, $BD = 18$ см, $DC = 21$ см. Бирелгән тетраэдрның: а) *ABC* нигезенең кабыргаларын; б) барлык ян кырларының мәйданнарын табыгыз.

68 *M* һәм *N* нокталары — *ABCD* тетраэдрында *AB* һәм *AC* кабыргаларының урталары. *MN* турысы *BCD* яссылыгына параллель икәнен исбатлагыз.

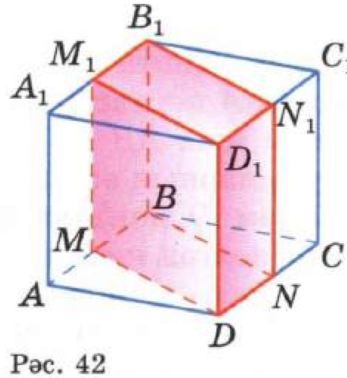
69 *SABC* тетраэдрында *AB* һәм *BC* кабыргаларының урталары аша *SB* кабыргасына параллель яссылык үткәрелгән. Бу яссылык *SAB* һәм *SBC* кырларын параллель турылар буенча кискәнен исбатлагыз.

70 *ABCD* тетраэдрында *AB*, *AC* һәм *AD* кабыргаларының урталары аша үтүче яссылык *BCD* яссылыгына параллель икәнен исбатлагыз.

71 *DABC* тетраэдрын сурәтләгез һәм *DB*, *DC* һәм *BC* кабыргаларында тиңдәшле рәвештә *M*, *N* һәм *K* нокталары билгеләгез. а) *MN* турысы һәм *ABC* яссылыгының; б) *KN* турысы һәм *ABD* яссылыгының кисешү ноктасын төзегез.

72 *DABC* тетраэдрын сурәтләгез һәм а) *M* ноктасы *AD* кабыргасының уртасында; б) *M* ноктасы *ABD* кырының эчендә ятканда, бу тетраэдрның *M* ноктасы аша *ABC* кырына параллель итеп үткәрелгән яссылык белән кисемен төзегез.

73 $ABCD$ тетраэдрында M, N һәм P нокталары — AB, BC һәм CD кабыргаларының урталары, $AC = 10$ см, $BD = 12$ см. MNP яссылыгы AD кабыргасының уртасы K аша үткәнен исбатлагыз һәм тетраэдр MNP яссылыгы белән кисешкәндә килеп чыккан дүртпочмакның периметрын табыгыз.



Рәс. 42

74 $ABCD$ тетраэдрында BCD кыры медианаларының кисешү ноктасы аша ABC кырына параллель яссылык үткәрелгән. а) Тетраэдрның бу яссылык белән киселме ABC өчпочмагына охшаш өчпочмак икәнен исбатлагыз. б) Кисем мәйданы белән ABC өчпочмагы мәйданының чагыштырмасын табыгыз.

75 $KLMN$ тетраэдрын сурәтләгез. а) Бу тетраэдрның KL кабыргасы һәм MN кабыргасының уртасы A аша үтүче яссылык белән кисемен төзегез. б) LM, MA һәм MK кисемтәләренең урталары E, O һәм F аша үтүче яссылыкның LKA яссылыгына параллель икәнен исбатлагыз. LKA өчпочмагының мәйданы 24 см^2 га тигез булса, EOF өчпочмагының мәйданын табыгыз.

76 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеды бирелгән. $AC \parallel A_1C_1$ һәм $BD \parallel B_1D_1$ икәнен исбатлагыз.

77 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедының барлык кабыргалары суммасы 120 см га тигез. $\frac{AB}{BC} = \frac{4}{5}$, $\frac{BC}{BB_1} = \frac{5}{6}$ икәне билгеле булса, параллелепипедның һәр кабыргасын табыгыз.

78 42 нче рәсемдә $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеды сурәтләнгән. Аның кабыргаларында, $AM = CN = A_1M_1 = C_1N_1$ булырлык итеп, M, N, M_1 һәм N_1 нокталары билгеләнгән. $MBNDM_1B_1N_1D_1$ нең параллелепипед икәнен исбатлагыз.

79 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедын сурәтләгез һәм аның: а) ABC_1 яссылыгы белән; б) ACC_1 яссылыгы белән кисемен төзегез. Төзелгән кисемнәрнең параллелограммнар икәнен исбатлагыз.

80 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедын сурәтләгез һәм аның ABC_1 һәм DCB_1 яссылыклары белән кисемнәрен, шулай ук бу кисемнәрнең кисешү кисемтәсен төзегез.

81 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедын сурәтләгез дә BB_1 һәм CC_1 кабыргаларында тиңдәшле рәвештә M һәм N нокталары билгеләгез. а) MN турысының ABC яссылыгы белән; б) AM турысының $A_1B_1C_1$ яссылыгы белән кисешү ноктасын төзегез.

82 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедын сурәтләгез һәм AA_1B_1B кырының эчке M ноктасын билгеләгез. Параллелепипедның M ноктасы аша: а) $ABCD$ нигезе яссылыгына; б) BB_1C_1C кырына; в) BDD_1 яссылыгына параллель үтүче кисемен төзегез.

83 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедын сурәтләгез һәм аның: а) CC_1 кабыргасы һәм AA_1D_1D кыры диагональләренең кисешү ноктасы аша; б) $ABCD$ кыры диагональләренең кисешү ноктасы аша AB_1C_1 яссылыгына параллель үтүче яссылык белән кисемен төзегез.

84 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедын сурәтләгез һәм аның B_1, D_1 нокталары һәм CD кабыргасының уртасы аша үтүче яссылык белән кисемен төзегез. Төзелгән кисемнең трапеция икәнен исбатлагыз.

85 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедын сурәтләгез һәм аның BKL яссылыгы белән кисемен төзегез, биредә K — AA_1 кабыргасының уртасы, L — CC_1 кабыргасының уртасы. Төзелгән кисемнең параллелограмм икәнен исбатлагыз.

86 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедын сурәтләгез һәм аның нигез диагонале AC аша BD_1 диагоналенә параллель үтүче яссылык белән кисемен төзегез. Параллелепипедның нигезе — ромб һәм ABB_1 һәм CBB_1 почмаклары туры булса, төзелгән кисемнең тигезьянлы өчпочмак икәнен исбатлагыз.

87 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедын сурәтләгез һәм аның MNK яссылыгы белән кисемен төзегез, биредә M, N һәм K нокталары тиңдәшле рәвештә: а) BB_1, AA_1, AD; б) CC_1, AD, BB_1 кабыргаларында яталар.

I бүлеккә сораулар

1 Ике турының уртак нокталары булмаса, алар параллель дип раслау дөресме?

2 M ноктасы a турысында ятмый. M ноктасы аша a турысын кисмичә ничә туры үтә? Бу турыларның ничәсе a турысына параллель?

3 a һәм c турылары параллель, a һәм b турылары кисешәләр. b һәм c турыларының параллель булуы мөмкинме?

4 a турысы α яссылыгына параллель. Бу туры: а) α яссылыгында яткан бер турыны да кисми; б) α яссылыгында ятучы теләсә нинди турыга параллель; в) α яссылыгында ятучы нинди дер турыга параллель дип раслау дөресме?

5 a турысы α яссылыгына параллель. α яссылыгында ятучы ничә туры a турысына параллель? α яссылыгында яткан бу турылар бер-берсенә параллельме?

6 a турысы α яссылыгын кисә. α яссылыгында a турысына параллель бер булса да туры ятамы?

7 Ике параллель турының берсе ниндидер яссылыкка параллель. Икенче туры да бу яссылыкка параллель дип раслау дөресме?

8 Ике туры ниндидер яссылыкка параллель булса, ул вакытта алар үзара да параллель дип раслау дөресме?

9 Ике туры ниндидер яссылыкка параллель. Бу турыларның: а) кисешүе; б) чалышма турылар булуы мөмкинме?

10 a һәм b чалышма турылары c турысына параллель булырмы?

11 Трапециянең ян-яклары α яссылыгына параллель. α яссылыгы һәм трапеция яссылыгы параллельме?

12 Параллелограммның ике ягы α яссылыгына параллель. α яссылыгы һәм параллелограмм яссылыгы параллельме?

13 Параллель яссылыклар арасындагы параллель булмаган ике кисемтәнең тигез булуы мөмкинме?

14 Кырларының биш почмагы туры булган тетраэдр бармы?

15 а) Бер генә кыры турыпочмаклык; б) чиктәш ике генә кыры ромб; в) кырларының барлык почмаклары да кысынкы; г) кырларының барлык почмаклары да туры булган; д) кырларының барлык кысынкы почмаклары саны кырларының барлык җәенке почмаклары санына тигез булмаган параллелепипед бармы?

16 а) Тетраэдрның; б) параллелепипедның кисемендә нинди күппочмаклар килеп чыгуы мөмкин?

Өстәмә мәсьәләләр

88 AC һәм BD параллель турылары α яссылыгын тиңдәшле рәвештә A һәм B нокталарында кисеп үтә. C һәм D нокталары α яссылыгыннан бер якта яталар. $AC = 8$ см, $BD = 6$ см, $AB = 4$ см. а) CD турысы α яссылыгын ниндидер E ноктасында кискәнен исбатлагыз; б) BE кисемтәсен табыгыз.

89 A, B, C һәм D нокталары бер яссылыкта ятмыйлар. ABC һәм CBD өчпочмакларының медианалары тиңдәшле рәвештә M_1 һәм M_2 нокталарында кисешәләр. AD һәм M_1M_2 кисемтәләре параллель икәнен исбатлагыз.

90 $ABCD$ трапециясенең A һәм B түбәләре α яссылыгында ята, ә C һәм D түбәләре бу яссылыкта ятмый. AB кисемтәсе: а) трапециянең нигезе; б) трапециянең ян-ягы булса, CD турысы α яссылыгына карата ничек урнашкан?

91 a һәм b параллель турыларының һәркайсы һәм бу турылар яссылыгында ятмаган M ноктасы аша яссылык үткәрелгән. Бу яссылыкларның a һәм b турыларына параллель туры буйлап кисешкәнен исбатлагыз.

92 α яссылыгы һәм a турысы b турысына параллель. a турысы я α яссылыгына параллель икәнен, я шул яссылыкта ятканын исбатлагыз.

93 a һәм b турылары параллель. a турысының M ноктасы аша a турысыннан үзгә һәм b турысын кисмәүче MN турысы үткәрелгән. MN һәм b турылары үзара ничек урнашкан?

94 Ике чалышма туры һәм бу турыларда ятмаган B ноктасы бирелгән. Һәркайсы бу турыларның берсе һәм B ноктасы аша үткән яссылыклар кисешәләрме? Җавабыгызны нигезләгез.

95 a турысы α яссылыгына параллель. β яссылыгы a турысын кисcә, ул α яссылыгын да кискәнен исбатлагыз.

96 Яссылык һәм аңа параллель булган туры арасында урнашкан параллель турыларның кисемтәләре тигез икәнен исбатлагыз.

97 Яклары тиңдәшле рәвештә параллель булган ике почмак я тигез, я аларның суммасы 180° ка тигез икәнен исбатлагыз.

98 a турысы α яссылыгына параллель. a турысы аша үтүче һәм α яссылыгына параллель яссылык бармы? Булса ничә?

99 Өч параллель яссылык үзләрен кисүче теләсә нинди ике турыдан пропорциональ кисемтәләр кисеп алганын исбатлагыз.

100 Ике чалышма туры һәм A ноктасы бирелгән. A ноктасы аша я бирелгән турыларга параллель, я аларның берсе аша үтеп, икенчесенә параллель булган бары тик бер генә яссылык үткәнен исбатлагыз.

101 Тетраэдрның капма-каршы кабыргаларының урталарын тоташ-

тыручы кисемтәләрнең кисешкәнен һәм кисешү ноктасы белән урталай бүленгәнен исбатлагыз.

102 Тетраэдрның нигезендәге ике кабыргасының уртасы һәм нигезендә ятмаган түбәсе аша үтүче α яссылыгы нигезнең өченче кабыргасына параллель икәнен исбатлагыз. Тетраэдрның барлык кабыргаларының да озынлыгы 20 см булса, тетраэдрның α яссылыгы белән кисеменең периметрын һәм мәйданын табыгыз.

103 $DABC$ тетраэдрының DA, DB һәм DC кабыргаларында, $DM : MA = DN : NB = DP : PC$ булырлык итеп, M, N һәм P нокталары билгеләнгән. MNP һәм ABC яссылыклары параллель икәнен исбатлагыз. ABC өчпочмагының мәйданы 10 см^2 га тигез һәм $DM : MA = 2 : 1$ булса, MNP өчпочмагының мәйданын табыгыз.

104 $ABCD$ тетраэдрын сурәтләгез һәм AB кабыргасында M ноктасы билгеләгез. Тетраэдрның M ноктасы аша AC һәм BD турыларына параллель үтүче яссылык белән кисемен төзегез.

105 $DABC$ тетраэдрын сурәтләгез, BD һәм CD кабыргаларында M һәм N нокталары, ә ABC кырында эчке K ноктасы билгеләгез. Тетраэдрның MNK яссылыгы белән кисемен төзегез.

106 $DABC$ тетраэдрын сурәтләгез, DC кабыргасында K ноктасы, ABC һәм ACD кырларында M һәм N нокталары билгеләгез. Тетраэдрның MNK яссылыгы белән кисемен төзегез.

107 $ABCD$ тетраэдрын сурәтләгез һәм AB кабыргасында M ноктасы билгеләгез. Тетраэдрның M ноктасы аша BDC кырына параллель үтүче яссылык белән кисемен төзегез.

108 $DABC$ тетраэдрының D түбәсе янындагы өч почмагының биссектрисалары BC, CA һәм AB кисемтәләрен тиңдәшле рәвештә A_1, B_1 һәм C_1 нокталарында кисеп үтәләр. AA_1, BB_1 һәм CC_1 кисемтәләренең бер ноктада кисешкәнен исбатлагыз.

109 Һәркайсы параллелепипедның бер кырда ятмаган ике ян кабыргасын эченә алган ике яссылык a турысы буенча кисешәләр. a турысы параллелепипедның ян кабыргасына параллель икәнен һәм аның барлык диагональләрен кискәнен исбатлагыз.

110 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедында A_1DB яссылыгы D_1CB_1 яссылыгына параллель икәнен исбатлагыз.

111 Параллелепипедның диагонале уртак түбәгә ия булган өч кабыргасының суммасыннан кечерәк икәнен исбатлагыз.

112 Параллелепипедның дүрт диагоналенең квадратлары суммасы аның унике кабыргасының квадратлары суммасына тигез икәнен исбатлагыз.

113 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедының A_1BCD_1 һәм BDD_1B_1 кисемнәренең яссылыклары нинди туры буйлап кисешәләр?

114 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедын сурәтләгез һәм AB кабыргасында M ноктасы билгеләгез. Параллелепипедның M ноктасы аша ACC_1 яссылыгына параллель үтүче яссылык белән кисемен төзегез.

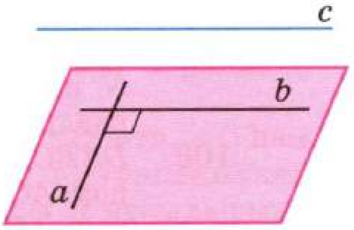
115 M ноктасы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедының BC кабыргасында ята. Бу параллелепипедның M ноктасы аша BDC_1 яссылыгына параллель үтүче яссылык белән кисемен төзегез.

II бүлек
Туры һәм яссылыкларның перпендикулярлыгы

§ 1 Туры һәм яссылыкның перпендикулярлыгы

15 Пространствода перпендикуляр турылар

Пространстводагы ике туры арасындагы почмак $90°$ ка тигез булса, алар **перпендикуляр** (үзара перпендикуляр) дип атала. a һәм b турыларының перпендикулярлыгы болай тамгалана: $a \perp b$. Перпендикуляр турылар кисешергә дә һәм чалышма булырга да мөмкин. 43 нче рәсемдә a һәм b перпендикуляр турылары кисешә, ә a һәм c перпендикуляр турылары чалышма.



Рәс. 43

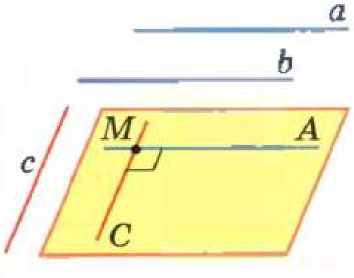
Ике параллель турының өченче турыга перпендикулярлыгы турындагы лемманы исбат итик.

Лемма

Әгәр ике параллель турының берсе өченче турыга перпендикуляр булса, икенче туры да бу турыга перпендикуляр була.

▼ **Исбатлау**

$a \parallel b$ һәм $a \perp c$ булсын. $b \perp c$ икәнен исбатларбыз. Пространствода бирелгән турыларда ятмаган теләсә нинди M ноктасы алабыз, a һәм c турыларына тиңдәшле рәвештә параллель итеп, MA һәм MC турылары үткәрәбез (рәс. 44). $a \perp c$ булганлыктан, $\angle AMC = 90°$.



Рәс. 44

Лемманың шарты буенча, $b \parallel a$, ә төзү буенча, $a \parallel MA$, шуңа күрә $b \parallel MA$. Шулай итеп, b һәм c турылары үзара $90°$ лы почмак төзүче MA һәм MC турыларына тиңдәшле рәвештә параллель. Бу b һәм c турылары арасындагы почмак шулай ук $90°$ ка тигез икәнен аңлата, ягъни $b \perp c$. Лемма исбатланды.

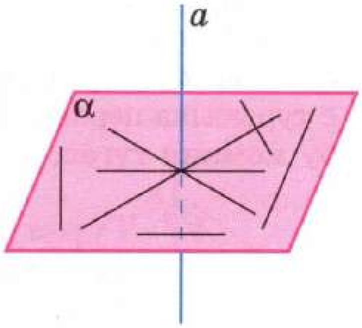
16 Яссылыкка перпендикуляр булган параллель турылар

Билгеләмә

Туры яссылыкта яткан теләсә нинди турыга перпендикуляр булса, ул шул **яссылыкка перпендикуляр** дип атала.

a турысының α яссылыгына перпендикулярлыгы болай тамгалана: $a \perp \alpha$, α **яссылыгы *a* турысына перпендикуляр** дип тә әйтәләр.

a турысы α яссылыгына перпендикуляр булса, ул бу яссылыкны кисеп үтә. Дөрестән дә, *a* турысы α яссылыгын кисмәсә, ул я бу яссылыкта ятар, я аңа параллель булыр иде. Ләкин ул вакытта α яссылыгында *a* турысына перпендикуляр булмаган турылар да, мәсәлән, аңа параллель турылар да булыр иде. Болай булу туры һәм яссылыкның перпендикулярлык билгесенә каршы килә. Димәк, *a* турысы α яссылыгын кисә.



Рәс. 45

45 нче рәсемдә α яссылыгына перпендикуляр *a* турысы сурәтләнгән.

Әйләнә-тирәбездә туры һәм яссылыкның перпендикулярлыгын күрсәтмәле итеп күзалларга мөмкинлек бирә торган мисаллар күп. Авышмаган телеграф баганасы туры тора, ягъни җир яссылыгына перпендикуляр. Йортның колоннасы — фундамент яссылыгына, стеналарның кисешү сызыгы идән яссылыгына шулай ук перпендикуляр урнашкан һ. б.

Турыларның параллельлеге белән аларның яссылыкка перпендикулярлыгы арасында бәйләнеш урнаштыра торган ике теорема исбатлыйк.

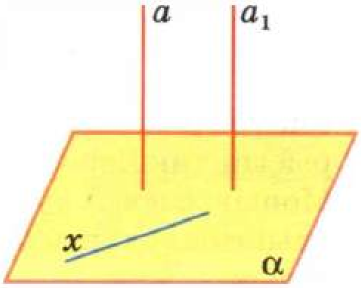
Теорема

Әгәр ике параллель турының берсе яссылыкка перпендикуляр булса, икенче туры да бу яссылыкка перпендикуляр була.

Исбатлау

a һәм a_1 параллель турыларын һәм α яссылыгын $a \perp \alpha$ булганда тикшерик. $a_1 \perp \alpha$ икәнен исбатларбыз.

α яссылыгында нинди дә булса *x* турысы үткәрәбез (рәс. 46). $a \perp \alpha$ булганга күрә, $a \perp x$. Ике параллель турының өченче турыга перпендикулярлыгы турындагы лемма буенча $a_1 \perp x$. Шул рәвешле, a_1 турысы α яссылыгында яткан теләсә нинди турыга перпендикуляр, ягъни $a_1 \perp \alpha$. Теорема исбатланды.



Рәс. 46

Кире теореманы исбатлыйк.

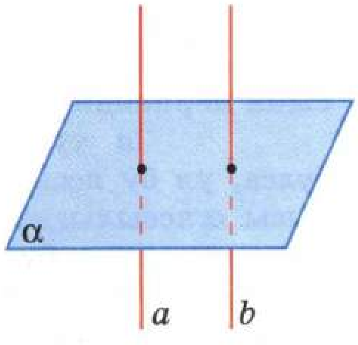
Теорема

Ике туры яссылыкка перпендикуляр булса, ул вакытта алар параллель.

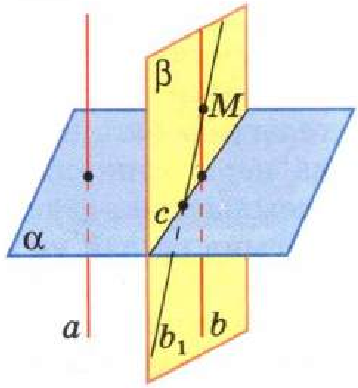
Исбатлау

α яссылыгына перпендикуляр булган a һәм b турыларын тикшерик (рәс. 47, *а*). $a \parallel b$ икәнен исбатларбыз.

b турысының нинди дә булса M ноктасы аша a турысына параллель b_1 турысы үткәрәбез. Алдагы теорема буенча, $b_1 \perp \alpha$. b_1 турысының b турысы белән тәңгәл килүен исбатлыйк. Шуның белән $a \parallel b$ икәне исбатланыр. b һәм b_1 турылары тәңгәл килми дип уйлыйк. Ул вакытта b һәм b_1 турыларын эченә алган β яссылыгында M ноктасы аша α һәм β яссылыкларының кисешү турысы булган c турысына перпендикуляр ике туры үтә (рәс. 47, *б*). Ләкин бу мөмкин түгел, димәк, $a \parallel b$. Теорема исбатланды. △



а)



б)

Рәс. 47

17 Туры белән яссылыкның перпендикулярлык билгесе

Бирелгән турының бирелгән яссылыкка перпендикуляр икәнен ничек тикшерергә? Бу сорау практик әһәмияткә ия, мәсәлән, мачталарны, биналарның колонналарын һ. б. куйганда, аларны туры итеп, ягъни куела торган яссылыкларына перпендикуляр итеп урнаштырырга кирәк. Моның өчен, билгеләмәдә әйтелгәнчә, теләсә нинди турыга перпендикулярлыкны түгел, бәлки яссылыкта яткан кисешүче ике турыга перпендикулярлыкны тикшерү дә җитә икән. Бу хәл туры белән яссылыкның перпендикулярлык билгесен белдергән түбәндәге теоремадан килеп чыга.

Теорема

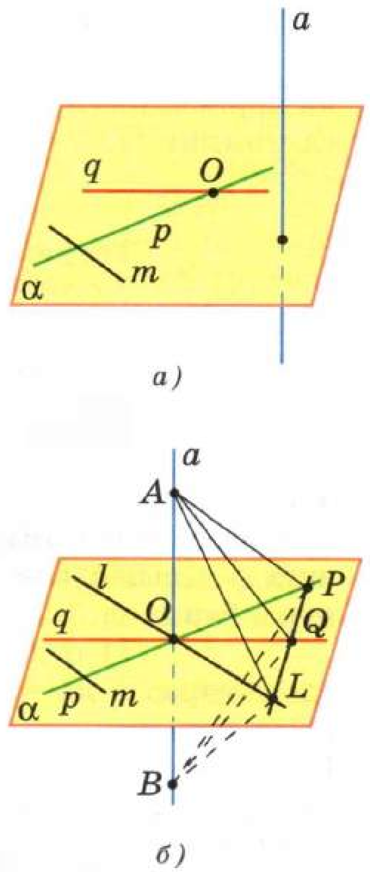
Әгәр туры яссылыкта яткан кисешүче ике турыга перпендикуляр булса, ул бу яссылыкка перпендикуляр була.

Исбатлау

α яссылыгында яткан һәм O ноктасында кисешүче p һәм q турыларына перпендикуляр булган a турысын тикшерик (рәс. 48, *а*). $a \perp \alpha$ икәнен исбатларбыз. Моның өчен a турысы α яссылыгында ирекле рәвештә алынган m турысына перпендикуляр икәнен исбатларга кирәк.

Башта a турысы O ноктасы аша үткән очракны тикшерербез (рәс. 48, *б*). O ноктасы аша m турысына параллель l турысы үткәрәбез (әгәр m турысы O ноктасы аша үтсә, l сыйфатында m турысының үзен алабыз). a турысында, O ноктасы AB кисемтәсенең уртасы булырлык итеп, A һәм B нокталары билгелибез дә α яссылыгында p, q һәм l турыларын тиңдәшле рәвештә

P, Q һәм L нокталарында кисүче туры үткәрәбез. Ачыклык өчен Q ноктасы P һәм L нокталары арасында ята дип исәпләрбез (рәс. 48, *б*).



Рәс. 48

p һәм q турылары AB кисемтәсенә урта перпендикуляр булганга күрә, $AP = BP$ һәм $AQ = BQ$. Шулай булгач, өч ягы буенча $\Delta\ APQ = \Delta\ BPQ$. Шуңа күрә $\angle APQ = \angle BPQ$.

Хәзер APL һәм BPL өчпочмакларын тикшерик. Алар ике ягы һәм алар арасындагы почмагы буенча тигез ($AP = BP$, PL — уртак як, $\angle APL = \angle BPL$), шуңа күрә $AL = BL$. Ләкин бу ABL өчпочмагы тигезьянлы һәм аның медианасы LO биеклек булганын, ягъни $l \perp a$ икәнен белдерә. $l \parallel m$ һәм $l \perp a$ булганга күрә, $m \perp a$ (ике параллель турының өченче турыга перпендикулярлыгы турындагы лемма буенча). Шулай итеп, a турысы α яссылыгындагы теләсә нинди m турысына перпендикуляр, ягъни $a \perp \alpha$.

Хәзер a турысы O ноктасы аша үтмәгән очракны тикшерик. O ноктасы аша a турысына параллель a_1 турысы үткәрәбез. Искә алынган лемма буенча $a_1 \perp p$ һәм $a_1 \perp q$, шуңа күрә беренче очракта исбатлаган буенча $a_1 \perp \alpha$. Моннан (16 нчы пункттагы беренче теорема буенча) $a \perp \alpha$ икәнлеге килеп чыга. Теорема исбатланды.

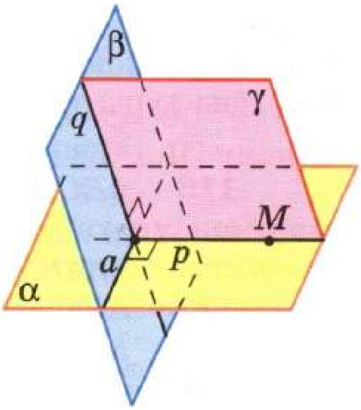
Түбәндәге мәсьәләне чишү өчен, туры белән яссылыкның перпендикулярлык билгесеннән файдаланырбыз.

Мәсьәлә

Пространствоның теләсә нинди ноктасы аша бирелгән турыга перпендикуляр яссылык үткәнен исбатларга.

Чишү

Бирелгән турыны — a хәрефе белән, ә пространствода ирекле рәвештә алынган ноктаны M хәрефе белән тамгалыйк. M ноктасы аша үтүче һәм a турысына перпендикуляр яссылык барлыгын исбатларбыз.



Рәс. 49

a турысы аша, $M \in \alpha$ булырлык итеп, α һәм β яссылыкларын үткәрәбез (рәс. 49)*. α яссылыгында M ноктасы аша a турысына перпендикуляр итеп — p турысы, ә β яссылыгында p һәм a турыларының кисешү ноктасы аша, a турысына перпендикуляр итеп, q турысы үткәрәбез. p һәм q турылары аша үтүче γ яссылыгын карарбыз. γ эзләнелгән яссылык була, чөнки a турысы бу яссылыктагы кисешүче ике турыга (p һәм q) перпендикуляр.

* 49 нчы рәсемдә M ноктасы a турысында ятмаган очрак сурәтләнгән. Әмма мәсьәләнең китерелгән чишелеше M ноктасы a турысында яткан очрак өчен дә ярый.

Искәрмә

γ ның M ноктасы аша үтүче һәм a турысына перпендикуляр бердәнбер яссылык икәнен исбатларга мөмкин (133 нче мәсьәлә).

18 Яссылыкка перпендикуляр туры турындагы теорема

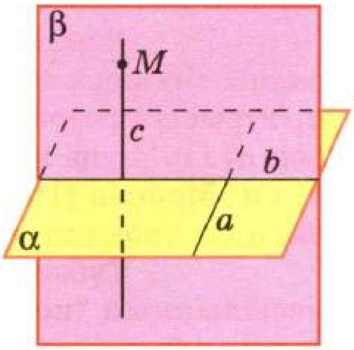
Теорема

Пространствоның теләсә нинди ноктасы аша бирелгән яссылыкка перпендикуляр туры үтә һәм бары тик бер генә.

▼ **Исбатлау**

Бирелгән яссылыкны — α хәрефе белән, ә пространствода ирекле рәвештә алынган ноктаны M хәрефе белән тамгалыйк. Исбатларбыз: 1) M ноктасы аша α яссылыгына перпендикуляр туры үтә; 2) андый туры бер генә.

1) α яссылыгында ирекле рәвештә a турысы үткәрәбез дә M ноктасы аша үтүче һәм a турысына перпендикуляр β яссылыгын тикшерәбез (рәс. 50). α һәм β яссылыкларының кисешү турысын b хәрефе белән тамгалыйк. β яссылыгында M ноктасы аша b турысына перпендикуляр c турысы үткәрәбез. c турысы эзләнелгән туры була да. Дөрестән дә, ул α яссылыгына перпендикуляр, чөнки бу яссылыктагы кисешүче ике турыга перпендикуляр ($c \perp b$ — төзү буенча һәм $c \perp a$, чөнки $\beta \perp a$).



Рәс. 50

2) M ноктасы аша α яссылыгына перпендикуляр тагын бер туры (аны c_1 дип тамгалыйк) үтә дип уйлыйк. Ул вакытта (16 нчы пункттагы кире теорема буенча) $c_1 \parallel c$, ә моның булуы мөмкин түгел, чөнки c_1 һәм c турылары M ноктасында кисешәләр. Шул рәвешле, M ноктасы аша α яссылыгына перпендикуляр бер генә туры үтә. Теорема исбатланды. △

Мәсьәләләр

116 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеды бирелгән.
а) $\angle BAD = 90°$ булса, $DC \perp B_1C_1$ һәм $AB \perp A_1D_1$;
б) $AB \perp DD_1$ булса, $AB \perp CC_1$ һәм $DD_1 \perp A_1B_1$ икәнен исбатлагыз.

117 $ABCD$ тетраэдрында $BC \perp AD$ икәне билгеле. $AD \perp MN$ (биредә M һәм N — AB һәм AC кабыргаларының урталары) икәнен исбатлагыз.

118 A, M һәм O нокталары — α яссылыгына перпендикуляр турыда, ә O, B, C һәм D нокталары α яссылыгында яталар. Түбәндәге почмакларның кайсылары туры почмак: $\angle AOB$, $\angle MOC$, $\angle DAM$, $\angle DOA$, $\angle BMO$?

119 OA турысы OBC яссылыгына перпендикуляр, һәм O ноктасы — AD кисемтәсенең уртасы. а) $AB = DB$; б) $OB = OC$ булса, $AB = AC$; в) $AB = AC$ булса, $OB = OC$ икәнен исбатлагыз.

120 Ягы a булган квадратта диагональләренең кисешү ноктасы O аша квадрат яссылыгына перпендикуляр OK турысы үткәрелгән. $OK = b$ булса, K ноктасыннан квадрат түбәләренә кадәр ераклыкны табыгыз.

121 ABC өчпочмагында бирелгән: $\angle C = 90°$, $AC = 6$ см, $BC = 8$ см, CM — медиана. C түбәсе аша ABC өчпочмагы яссылыгына перпендикуляр CK турысы үткәрелгән, өстәвенә $CK = 12$ см. KM ны табыгыз.

122 CD турысы төзек ABC өчпочмагы яссылыгына перпендикуляр. Бу өчпочмакның үзәге O аша CD турысына параллель OK турысы үткәрелгән. $AB = 16\sqrt{3}$ см, $OK = 12$ см, $CD = 16$ см икәне билгеле. D һәм K нокталарыннан өчпочмакның A һәм B түбәләренә кадәрге ераклыкларны табыгыз.

123 α һәм β яссылыклары a турысына перпендикуляр булса, аларның параллель икәнен исбатлагыз.

Чишү

α һәм β яссылыкларын төрле A һәм B нокталарында кисәрлек итеп, a турысына параллель нинди дә булса туры үткәрәбез. 16 нчы пункттагы беренче теорема буенча, α һәм β яссылыклары AB турысына перпендикуляр.

Әгәр α һәм β яссылыклары параллель түгел, ягъни бер булса да уртак M ноктасы бар дип фараз итсәк, ул вакытта A һәм B түбәләре янындагы ике почмагы туры булган ABM өчпочмагы килеп чыгар иде, ә моның булуы мөмкин түгел. Димәк, $\alpha \parallel \beta$.

124 PQ турысы α яссылыгына параллель. P һәм Q нокталары аша бу яссылыкны тиңдәшле рәвештә P_1 һәм Q_1 нокталарында кисә торган α яссылыгына перпендикуляр турылар үткәрелгән. $PQ = P_1Q_1$ икәнен исбатлагыз.

125 PQ турысының P һәм Q нокталары аша α яссылыгына перпендикуляр булган һәм аны тиңдәшле рәвештә P_1 һәм Q_1 нокталарында кисүче турылар үткәрелгән. $PQ = 15$ см, $PP_1 = 21{,}5$ см, $QQ_1 = 33{,}5$ см булса, P_1Q_1 не табыгыз.

126 MB турысы ABC өчпочмагының AB һәм BC якларына перпендикуляр. MBD өчпочмагының төрен билгеләгез, биредә D ноктасы AC турысында ирекле рәвештә алынган.

127 ABC өчпочмагында A һәм B почмакларының суммасы $90°$ ка тигез. BD турысы ABC яссылыгына перпендикуляр. $CD \perp AC$ икәнен исбатлагыз.

128 $ABCD$ параллелограммында диагональләренең кисешү ноктасы O аша, $MA = MC$, $MB = MD$ булырлык итеп, OM турысы үткәрелгән. OM турысы параллелограмм яссылыгына перпендикуляр икәнен исбатлагыз.

129 AM турысы диагональләре O ноктасында кисешүче $ABCD$ квадраты яссылыгына перпендикуляр. а) BD турысы AMO яссылыгына перпендикуляр; б) $MO \perp BD$ икәнен исбатлагыз.

130 $ABCD$ квадратының B түбәсе аша BM турысы үткәрелгән. $\angle MBA = \angle MBC = 90°$, $MB = m$, $AB = n$ икәне билгеле. M ноктасыннан: а) квадратның түбәләренә кадәр; б) AC һәм BD турыларына кадәр ераклыкларны табыгыз.

131 $ABCD$ тетраэдрында M ноктасы — BC кабыргасының уртасы, $AB = AC$, $DB = DC$. ADM өчпочмагы яссылыгы BC турысына перпендикуляр икәнен исбатлагыз.

132 Ике параллель яссылыкның берсе турыга перпендикуляр булса, икенче яссылык та бу турыга перпендикуляр икәнен исбатлагыз.

133 Пространствоның теләсә нинди ноктасы аша бирелгән турыга перпендикуляр булган бер генә яссылык үткәнен исбатлагыз.

Чишү

17 нче пункттагы мәсьәлә буенча бирелгән M ноктасы аша бирелгән a турысына перпендикуляр булган α яссылыгы үтә. M ноктасы аша бу турыга перпендикуляр тагын бер яссылык α_1 үтә дип фараз итик. Ул вакытта α һәм α_1 яссылыклары параллель (123 нче мәсьәләне кара). Ләкин моның булуы мөмкин түгел, чөнки бу яссылыклар уртак M ноктасына ия. Шулай булгач, безнең фаразыбыз дөрес түгел, һәм M ноктасы аша a турысына перпендикуляр бер генә яссылык үтә.

134 a турысының бирелгән M ноктасы аша үтүче һәм бу турыга перпендикуляр барлык турылар M ноктасы аша үтүче һәм a турысына перпендикуляр яссылыкта ятканын исбатлагыз.

135 a турысы α яссылыгына һәм бу яссылыкта ятмаган b турысына перпендикуляр. $b \parallel \alpha$ икәнен исбатлагыз.

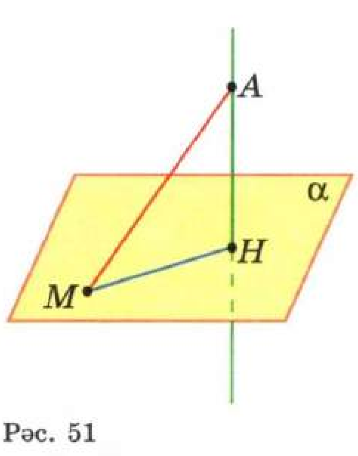
136 Әгәр X ноктасы бирелгән AB кисемтәсенең очларыннан тигез ераклыкта булса, ул AB кисемтәсенең уртасы аша үтүче һәм AB турысына перпендикуляр яссылыкта ятканын исбатлагыз.

137 Үзара перпендикуляр ике чалышма турының һәркайсы аша икенче турыга перпендикуляр яссылык үткәнен исбатлагыз.

§2 Перпендикуляр һәм авышмалар. Туры белән яссылык арасындагы почмак

19 Ноктадан яссылыкка кадәр ераклык

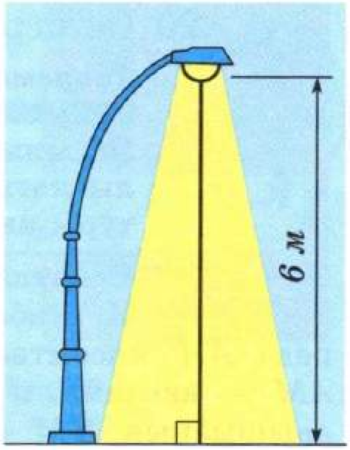
α яссылыгын һәм бу яссылыкта ятмаган A ноктасын тикшерик. A ноктасы аша α яссылыгына перпендикуляр туры үткәрәбез һәм бу турының α яссылыгы белән кисешү ноктасын H хәрефе белән тамгалыйбыз (рәс. 51). AH кисемтәсе **A ноктасыннан α яссылыгына үткәрелгән перпендикуляр** дип, ә H ноктасы **перпендикулярның нигезе** дип атала. α яссылыгында H тан үзгә нинди дә булса M ноктасы билгеләп, AM кисемтәсе үткәрәбез. Ул **A ноктасыннан α яссылыгына үткәрелгән авышма** дип, ә M ноктасы **авышманың нигезе** дип атала. HM кисемтәсе **авышманың α яссылыгына проекциясе** дип атала. AH перпендикуляры белән AM авышмасын чагыштырыйк: турыпочмаклы AMH өчпочмагында AH ягы — катет, ә AM ягы — ги-



Рәс. 51

потенуза, шуңа күрә $AH < AM$. Шулай итеп, **бирелгән ноктадан яссылыкка үткәрелгән перпендикуляр шул ук ноктадан бу яссылыкка үткәрелгән теләсә нинди авышмадан кечерәк.**

Димәк, A ноктасыннан α яссылыгының төрле нокталарына кадәрге барлык ераклыкларыннан H ноктасына кадәрге ераклык иң кечкенәсе була. Бу ераклык, ягъни A ноктасыннан α яссылыгына үткәрелгән перпендикулярның озынлыгы **A ноктасыннан** α **яссылыгына кадәр ераклык** дип атала. Без нинди дер предмет, мәсәлән, урам фонареның лампасы җирдән 6 м биеклектә дип әйтәбез икән, лампадан алып җир өслегенә кадәр ераклык лампадан җир өслеге яссылыгына үткәрелгән перпендикуляр буенча үлчәнүен күздә тотабыз (рәс. 52).



Рәс. 52

Искәрмәләр

1. Әгәр ике яссылык параллель булса, бер яссылыкның барлык нокталары икенче яссылыктан тигез ераклыкта булалар. Дөрестән дә, α яссылыгының ирекле рәвештә алынган A һәм M нокталарыннан бу яссылыкка параллель булган β яссылыгына үткәрелгән AA_0 һәм MM_0 перпендикулярларын тикшерик. $AA_0 \perp \beta$ һәм $MM_0 \perp \beta$ булганга күрә, $AA_0 \parallel MM_0$. Моннан $MM_0 = AA_0$ икәнлеге (п. 11, 2° үзлеге), ягъни α яссылыгының теләсә нинди M ноктасыннан β яссылыгына кадәр ераклык AA_0 кисемтәсенең озынлыгына тигез икәнлеге килеп чыга. β яссылыгының барлык нокталары α яссылыгыннан шундый ук ераклыкта булуы ачык аңлашыла.

Параллель яссылыкларның берсендә ирекле рәвештә алынган ноктадан икенче яссылыкка кадәр ераклык **параллель яссылыклар арасындагы ераклык** дип атала.

Инде әйтеп үткәнебезчә, бүлмәнең идән һәм түшәм яссылыклары параллель яссылыкларның мисалы булып тора. Түшәмнең барлык нокталары идәннән бердәй ераклыкта. Бу — бүлмәнең биеклеге була да инде.

2. Әгәр туры яссылыкка параллель булса, турының барлык нокталары шул яссылыктан тигез ераклыкта урнаша (144 нче мәсьәлә). Бу очракта турының ирекле рәвештә алынган нокталарыннан яссылыкка кадәр ераклык **туры һәм аңа параллель яссылык арасындагы ераклык** дип атала.

3. Ике туры чалышма булса, ул вакытта, 7 нче пунктта исбатланганча, аларның һәркайсы аша икенче турыга параллель яссылык үтә һәм бары тик бер генә. Чалышма турыларның берсе белән икенче туры аша беренчесенә параллель үтүче яссылык арасындагы ераклык **чалышма турылар арасындагы ераклык** дип атала.

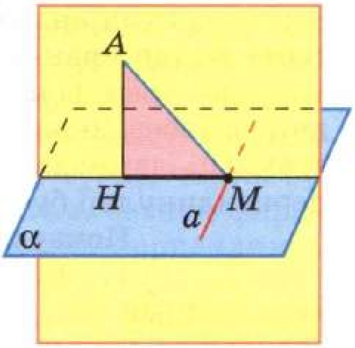
20 Өч перпендикуляр турындагы теорема

Теорема

Яссылыкта авышманың нигезе аша аның шул яссылыктагы проекциясенә перпендикуляр итеп үткәрелгән туры авышманың үзенә дә перпендикуляр була.

Исбатлау

Игътибарны 53 нче рәсемгә юнәлтик, биредә AH кисемтәсе α яссылыгына перпендикуляр, AM — авышма, a — α яссылыгында M ноктасы аша авышманың HM проекциясенә перпендикуляр итеп үткәрелгән туры. $a \perp AM$ икәнен исбатларбыз.



Рәс. 53

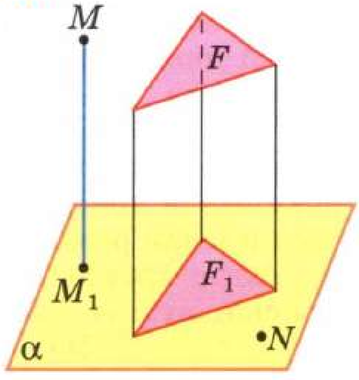
AMH яссылыгын тикшерик. a турысы бу яссылыкка перпендикуляр, чөнки ул кисешүче AH һәм MH турыларына перпендикуляр ($a \perp HM$ шарт буенча һәм $a \perp AH$, чөнки $AH \perp \alpha$). Моннан a турысының AMH яссылыгында яткан теләсә нинди турыга перпендикуляр, аерым алганда $a \perp AM$ икәнлеге килеп чыга. Теорема исбатланды.

Бу теорема **өч перпендикуляр турындагы теорема** дип атала, чөнки анда өч перпендикуляр: AH, HM һәм AM арасындагы бәйләнеш турында әйтелә.

Кире теорема да дөрес: **яссылыкта авышманың нигезе аша аңа перпендикуляр итеп үткәрелгән туры авышманың проекциясенә дә перпендикуляр була.** 53 нче рәсемнән файдаланып, туры теореманы исбатлаганга аналогик рәвештә әлеге теореманы үзегез исбатлагыз (153 нче мәсьәлә).

21 Туры белән яссылык арасындагы почмак

19 нчы пунктта авышманың яссылыкка проекциясенә билгеләмә бирелгән иде. Хәзер теләсә нинди фигураның проекциясе* төшенчәсен бирербез. Әгәр нокта яссылыкта ятмаса, бу ноктадан яссылыкка үткәрелгән перпендикулярның нигезе, ә нокта яссылыкта ятса, нокта үзе үк **ноктаның яссылыкка проекциясе** дип атала. 54 нче рәсемдә M_1 ноктасы — M ноктасының α яссылыгына проекциясе, ә N исә — үзе үк N ноктасының шул яссылыкка проекциясе ($N \in \alpha$).



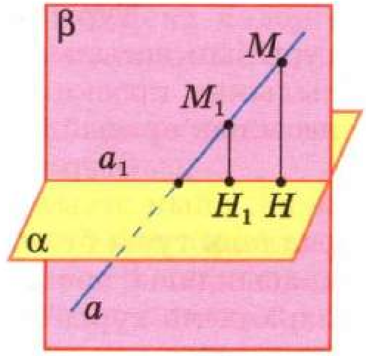
Рәс. 54

Пространстводагы нинди дә булса фигураны F хәрефе белән тамгалыйк. Әгәр без бу фигураның

* Бу пунктта фигураның турыпочмаклы проекциясе турында сүз бара. Фигураның параллель проекциясенең гомумирәк төшенчәсе 1 нче кушымтада карала.

бирелгән яссылыкка барлык нокталарының проекцияләрен төзесәк, **F фигурасының** бирелгән яссылыкка **проекциясе** дип аталган F_1 фигурасын табарбыз. 54 нче рәсемдә F_1 өчпочмагы — F өчпочмагының α га проекциясе.

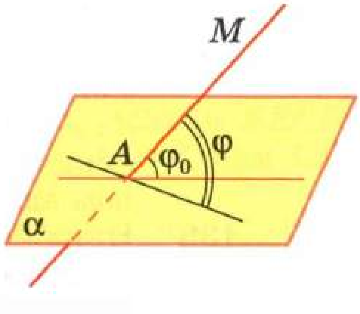
Яссылыкка перпендикуляр булмаган турының шул яссылыкка проекциясе туры икәнен исбатларбыз.



Рәс. 55

Бирелгән яссылыкны — α хәрефе белән, α яссылыгына перпендикуляр булмаган ирекле рәвештә алынган турыны a хәрефе белән тамгалыйк (рәс. 55). a турысының нинди дә булса M ноктасыннан α яссылыгына MH перпендикуляры үткәрик тә a һәм MH аша үтүче β яссылыгын тикшерик. α һәм β яссылыклары ниндидер a_1 турысы буенча кисешәләр. Бу туры a турысының α яссылыгына проекциясе икәнен исбатлыйк. Дөрестән дә, a турысында ирекле рәвештә M_1 ноктасы алып, β яссылыгында MH турысына параллель M_1H_1 турысы үткәрик (H_1 — M_1H_1 һәм a_1 турыларының кисешү ноктасы). 16 нчы пункттагы беренче теорема буенча, $M_1H_1 \perp \alpha$, димәк, H_1 ноктасы M_1 ноктасының α яссылыгына проекциясе була. Без a турысында ирекле рәвештә алынган ноктаның проекциясе a_1 турысында ятканын исбатладык. Шуңа охшаш рәвештә a_1 турысының теләсә нинди ноктасы a турысының ниндидер ноктасының проекциясе булганы исбатлана. Шулай булгач, a_1 турысы — a турысының α яссылыгына проекциясе.

Исбатланган расламадан яссылыкка перпендикуляр булмаган AB кисемтәсенең проекциясе очлары A һәм B нокталарының проекцияләре булган кисемтә икәнлеге килеп чыга. Шуңа күрә авышманың проекциясе билгеләмәсе (п. 19) фигура проекциясенең гомуми билгеләмәсе белән тулысынча туры килә. Турының яссылыкка проекциясе төшенчәсеннән файдаланып, туры белән яссылык арасындагы почмак төшенчәсен бирик.



Рәс. 56

Билгеләмә

Туры белән бу турыны кисүче һәм аңа перпендикуляр булмаган **яссылык арасындагы почмак** дип туры белән аның шул яссылыкка проекциясе арасындагы почмак атала.

Бирелгән AM турысы белән α яссылыгы арасындагы φ_0 почмагы (рәс. 56) турының α яссылыгындагы A ноктасы аша үткәрелгән турылар белән төзелгән барлык φ почмаклары арасында иң кечкенәсе булганын исбат итәргә мөмкин (162 нче мәсьәлә).

Туры яссылыкка перпендикуляр булса, бу турының яссылык белән кисешү ноктасы аның шул яссылыкка проекциясе була. Андый очракта туры белән яссылык арасындагы почмак 90° ка тигез дип исәпләнә.

Әгәр бирелгән туры яссылыкка параллель икән, аның яссылыкка проекциясе бирелгән турыга параллель туры була. Бу очракта без туры белән яссылык арасындагы почмак төшенчәсен бирмибез. (Кайвакыт параллель туры белән яссылык арасындагы почмакны 0°ка тигез дип исәпләргә килешәләр.)

▼ **Искәрмә**

Бу пунктта тикшерелгән турыпочмаклы проекция һәм параллель проекция белән беррәттән, кайвакыт 1 нче кушымтада сөйләнәчәк үзәкле симметрия дә файдаланыла. Ул болай билгеләнә. Ирекле рәвештә алынган α яссылыгын һәм бу яссылыкта ятмаган нинди дә булса O ноктасын тикшерәбез. β — O ноктасы аша үтүче һәм α яссылыгына параллель яссылык булсын. β яссылыгында ятмаган **M ноктасының α яссылыгына үзәкле проекциясе** (үзәге O булган) дип OM турысының α яссылыгы белән кисешү ноктасы булган M_1 ноктасы атала. β яссылыгында ятмаган фигураның барлык нокталарының α яссылыгына үзәкле проекцияләре күплеге **фигураның α яссылыгына үзәкле проекциясе** дип атала. Фигураның фотосурәте фигураның үзәкле симметриясенә мисал булып тора. △

Мәсьәләләр

138 Ниндидер ноктадан бирелгән яссылыкка перпендикуляр һәм почмагы φ гә тигез булган авышма үткәрелгән. а) Перпендикуляр d га тигез булса, авышманы һәм аның бирелгән яссылыкка проекциясен табыгыз; б) авышма m га тигез булса, перпендикулярны һәм авышманың проекциясен табыгыз.

139 Ниндидер ноктадан яссылыкка ике авышма үткәрелгән. а) Әгәр авышмалар тигез булса, ул вакытта аларның проекцияләре дә тигез; б) әгәр авышмаларның проекцияләре тигез булса, ул вакытта аларның авышмалары да тигез; в) әгәр авышмалар тигез булмаса, ул вакытта зуррак авышманың проекциясе дә зуррак икәнен исбатлагыз.

140 α яссылыгында ятмаган A ноктасыннан бу яссылыкка AO перпендикуляры һәм үзара тигез AB, AC авышмалары үткәрелгән. $\angle OAB = \angle BAC = 60°$, $AO = 1{,}5$ см икәне билгеле. Авышмаларның нигезләре арасындагы ераклыкны табыгыз.

141 Бирелгән кисемтәнең бер очы α яссылыгында, ә икенчесе аңардан 6 см ераклыкта ята. Бирелгән кисемтәнең уртасыннан α яссылыгына кадәр ераклыкны табыгыз.

142 Кисемтәнең очлары α яссылыгыннан 1 см һәм 4 см ераклыкта ята. Кисемтәнең уртасыннан α яссылыгына кадәр ераклыкны табыгыз.

143 M ноктасыннан тѳзек ABC ѳчпочмагының һәр түбәсенә кадәрге ераклык 4 см га тигез. $AB = 6$ см булса, M ноктасыннан ABC яссылыгына кадәр ераклыкны табыгыз.

144 a турысы α яссылыгына параллель. a турысының барлык нокталары α яссылыгыннан тигез ераклыкта икәнен исбатлагыз.

Чишү

a турысының нинди дә булса ноктасы аша, α яссылыгына параллель итеп, β яссылыгы үткәрәбез (59 нчы мәсьәлә). a турысы β яссылыгында ята, чѳнки шулай булмаганда ул β яссылыгын кисә, димәк, α яссылыгын да кисә (55 нче мәсьәлә), ә моның булуы мѳмкин түгел. β яссылыгының барлык нокталары α яссылыгыннан тигез ераклыкта, шуңа күрә β яссылыгында яткан a турысының да барлык нокталары α яссылыгыннан тигез ераклыкта, шуны исбатларга кирәк иде дә.

145 C почмагы туры булган турыпочмаклы ABC ѳчпочмагының A түбәсеннән, ѳчпочмак яссылыгына перпендикуляр итеп, AD турысы үткәрелгән. а) CBD ѳчпочмагының турыпочмаклы икәнен исбатлагыз; б) $BC = a$, $DC = b$ булса, BD ны табыгыз.

146 a турысы α яссылыгын M ноктасында кисә һәм бу яссылыкка перпендикуляр түгел. α яссылыгында M ноктасы аша a турысына перпендикуляр туры үткәнен һәм бу турының бер генә икәнен исбатлагыз.

147 M ноктасыннан $ABCD$ турыпочмаклыгы яссылыгына MB перпендикуляры үткәрелгән. AMD һәм MCD ѳчпочмакларының турыпочмаклы икәнен исбатлагыз.

148 AK турысы тѳзек ABC ѳчпочмагы яссылыгына перпендикуляр, M — BC ягының уртасы. $MK \perp BC$ икәнен исбатлагыз.

149 AD кисемтәсе тигезьянлы ABC ѳчпочмагы яссылыгына перпендикуляр. $AB = AC = 5$ см, $BC = 6$ см, $AD = 12$ см икәне билгеле. AD кисемтәсе очларыннан BC турысына кадәрге ераклыкларны табыгыз.

150 $ABCD$ турыпочмаклыгының A түбәсеннән, турыпочмаклык яссылыгына перпендикуляр итеп, AK турысы үткәрелгән. $KD = 6$ см, $KB = 7$ см, $KC = 9$ см икәне билгеле. а) K ноктасыннан $ABCD$ турыпочмаклыгы яссылыгына кадәр ераклыкны; б) AK һәм CD турылары арасындагы ераклыкны табыгыз.

151 CD турысы ABC ѳчпочмагы яссылыгына перпендикуляр. а) ABC ѳчпочмагы ABD ѳчпочмагының ABC яссылыгына проекциясе; б) CH кисемтәсе ABC ѳчпочмагының биеклеге булса, ул вакытта DH ның ABD ѳчпочмагының биеклеге булуын исбатлагыз.

152 $ABCD$ квадратының B түбәсе аша, квадрат яссылыгына перпендикуляр итеп, BF турысы үткәрелгән. $BF = 8$ дм, $AB = 4$ дм булса, F ноктасыннан квадрат якларын һәм диагональләрен эченә алган турыларга кадәр ераклыкларны табыгыз.

153 α яссылыгында AM авышмасының M нигезе аша аңа перпендикуляр итеп үткәрелгән a турысы авышманың проекциясе HM га перпендикуляр икәнен исбатлагыз (53 нче рәс. кара).

Чишү

a турысы AMH яссылыгына перпендикуляр, чѳнки ул бу яссылыктагы кисешүче ике турыга перпендикуляр ($a \perp AM$ шарт буенча һәм

$a \perp AH$, чөнки $AH \perp \alpha$). Моннан a турысы AMH яссылыгында яткан теләсә нинди a турысына перпендикуляр, аерым алганда, $a \perp HM$ икәнлеге килеп чыга, шуны исбатларга кирәк иде дә.

154 BD турысы ABC өчпочмагы яссылыгына перпендикуляр. $BD = 9$ см, $AC = 10$ см, $BC = BA = 13$ см икәне билгеле. а) D ноктасыннан AC турысына кадәр ераклыкны; б) ACD өчпочмагының мәйданын табыгыз.

155 Тигезьянлы турыпочмаклы ABC өчпочмагының C туры почмагы түбәсе аша, аның яссылыгына перпендикуляр итеп, CM турысы үткәрелгән. $AC = 4$ см, ә $CM = 2\sqrt{7}$ см булса, M ноктасыннан AB турысына кадәрге ераклыкны табыгыз.

156 Турыпочмаклы ABC өчпочмагының бер катеты m га тигез, бу катет янындагы кысынкы почмагы φ гә тигез. C туры почмагы түбәсе аша, өчпочмак яссылыгына перпендикуляр итеп, CD турысы үткәрелгән, $CD = n$. D ноктасыннан AB турысына кадәрге ераклыкны табыгыз.

157 OK турысы диагональләре O ноктасында кисешә торган $ABCD$ ромбы яссылыгына перпендикуляр. а) K ноктасыннан ромбның якларын эченә алган турыларга кадәрге ераклыклар тигез икәнен исбатлагыз; б) $OK = 4{,}5$ дм, $AC = 6$ дм, $BD = 8$ дм булса, бу ераклыкны табыгыз.

158 $ABCD$ ромбының B түбәсе аша, аның яссылыгына перпендикуляр итеп, BM турысы үткәрелгән. $AB = 25$ см, $\angle BAD = 60°$, $BM = 12{,}5$ см булса, M ноктасыннан ромбның якларын эченә алган турыларга кадәр ераклыкларны табыгыз.

159 BM турысы $ABCD$ турыпочмаклыгы яссылыгына перпендикуляр. ADM һәм BCM яссылыкларының кисешү турысы ABM яссылыгына перпендикуляр икәнен исбатлагыз.

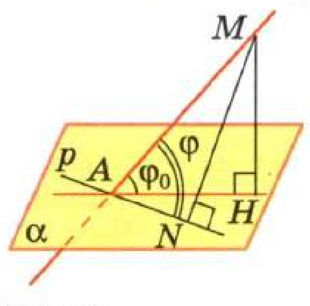
160 AB кисемтәсенең очлары бер-берсеннән d ераклыктагы параллель яссылыкларда ята, өстәвенә $d < AB$. AB кисемтәсенең бу яссылыкларга проекцияләре тигез икәнен исбатлагыз: $AB = 13$ см, $d = 5$ см булса, бу проекцияләрне табыгыз.

161 BA нуры җәелмәгән CBD почмагы яссылыгында ятмый. Әгәр $\angle ABC = \angle ABD$, өстәвенә $\angle ABC < 90°$ булса, BA нурының CBD яссылыгына проекциясе CBD почмагының биссектрисасы икәнен исбатлагыз.

162 MA турысы α яссылыгының A ноктасы аша үтә һәм бу яссылык белән $\varphi_0 \neq 90°$ почмагы төзи. α яссылыгында A ноктасы аша үткәрелгән турылар белән MA турысы төзегән барлык почмаклардан φ_0 иң кечкенәсе икәнен исбатлагыз.

Чишү

M ноктасыннан α яссылыгына үткәрелгән перпендикулярның нигезен H хәрефе белән тамгалыйбыз да α яссылыгында A ноктасы аша үтүче һәм AH турысыннан үзгә булган теләсә нинди p турысын карыйбыз (рәс. 57).



Рәс. 57

AM һәм p турылары арасындагы почмакны φ аша тамгалап, $\varphi > \varphi_0$ икәнен исбатларбыз. M ноктасыннан p турысына MN перпендикуляры үткәрәбез. Әгәр N ноктасы A ноктасы белән тәңгәл килсә, $\varphi = 90°$ һәм шуңа күрә $\varphi > \varphi_0$. A һәм N нокталары тәңгәл килмәгән очракны тикшерик (57 нче рәс. кара). AM кисемтәсе — турыпочмаклы ANM һәм AHM өчпочмакларының уртак гипотенузасы, шуңа күрә $\sin \varphi = \frac{MN}{AM}$, $\sin \varphi_0 = \frac{MH}{AM}$. $MN > MH$ булгач (MN — авышма, MH — перпендикуляр), бу ике тигезлектән $\sin \varphi > \sin \varphi_0$ икәнлеге килеп чыга һәм шуңа күрә $\varphi > \varphi_0$.

163 A ноктасыннан бирелгән яссылыкка үткәрелгән AM авышмасы d га тигез. Әгәр AM турысы белән бирелгән яссылык арасындагы почмак: а) 45°; б) 60°; в) 30° ка тигез булса, бу авышманың яссылыкка проекциясе нәрсәгә тигез?

164 α яссылыгына, φ почмагы ясап, авышма үтә. Авышманың проекциясе үзеннән ике тапкыр кечерәк икәне билгеле булса, φ не табыгыз.

165 γ яссылыгыннан d ераклыктагы A ноктасыннан, бу яссылыкка 30° лы почмак ясап, AB һәм AC авышмалары үткәрелгән. Аларның γ яссылыгына проекцияләре 120° лы почмак тәзи. BC ны табыгыз.

§ 3 Икекырлы почмак. Яссылыкларның перпендикулярлыгы

22 Икекырлы почмак

Яссылыкта почмак дип бер ноктадан чыккан ике нур белән төзелгән фигураны атыйлар. Стереометриядә мондый почмаклар белән рәттән почмакларның тагын бер төре — **икекырлы почмаклар** тикшерелә. Икекырлы почмак төшенчәсен кертү өчен, бирелгән яссылыкта үткәрелгән теләсә нинди туры бу яссылыкны ике ярымъяссылыкка бүлүен искәртеп китәбез (рәс. 58, *а*). Яссылыкны a турысы буйлап бөктек дип күз алдына китерик, ул вакытта инде чиге a булган ике ярымъяссылык бер яссылыкта ятмый (рәс. 58, *б*). Килеп чыккан фигура икекырлы почмак була да инде.

Шул рәвешле, икекырлы почмакка мондый билгеләмә бирергә мөмкин: **a турысыннан һәм уртак чиге a булган бер яссылыкта ятмаган ике ярымъяссылыктан торган фигура икекырлы почмак дип атала.** Икекырлы почмакны төзүче ярымъяссылыклар аның **кырлары** дип атала. Икекырлы почмакның ике кыры бар, икекырлы почмак исеме шуннан чыгып алынган. a турысы — ярымъяссылыкларның уртак чиге — икекырлы почмакның **кабыргасы** дип атала.

а) a турысы яссылыкны ике ярымъяссылыкка бүлә

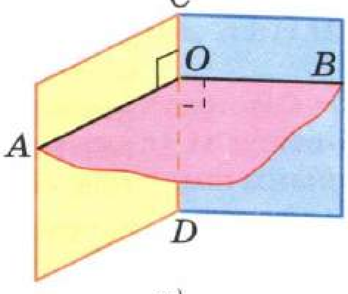
б) Икекырлы почмак

Рәс. 58

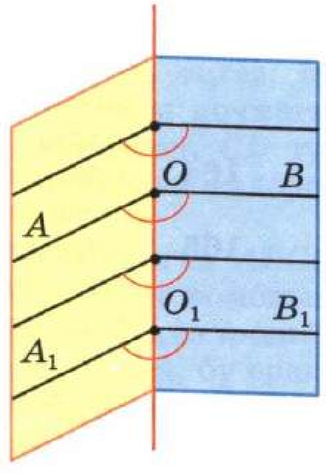
Кабыргасы AB булган һәм төрле кырларында C һәм D нокталары билгеләнгән икекырлы почмак $CABD$ икекырлы почмагы дип атала.

Көндәлек тормышта без икекырлы почмак формасындагы әйберләр белән еш очрашабыз. Биналарның ике кыеклы түбәләре, ярым ачык капка, бүлмәнең стенасы белән түшәме һ. б. шундый мисаллар булып тора.

Яссылыкта почмаклар (гадәти почмаклар) градусларда үлчәнгәнен без беләбез. Ә икекырлы почмаклар ничек үлчәнә соң? Бу түбәндәгечә эшләнә. Икекырлы почмакның кабыргасында нинди дә булса нокта билгелибез дә һәр кырда шул ноктадан кабыргага перпендикуляр нур үткәрәбез. Бу нурлар белән төзелгән почмак **икекырлы почмакның сызыкча почмагы** дип атала. 59, *а* рәсемендә AOB почмагы — кабыргасы CD булган икекырлы почмакның сызыкча почмагы. $OA \perp CD$ һәм $OB \perp CD$ булганга, AOB яссылыгы CD турысына перпендикуляр. Шулай итеп, сызыкча почмак яссылыгы икекырлы почмакның кабыргасына перпендикуляр. Икекырлы почмакның сызыкча почмаклары чиксез күп икәнлеге үзеннән-үзе аңлашыла (рәс. 59, *б*).



а)



б)

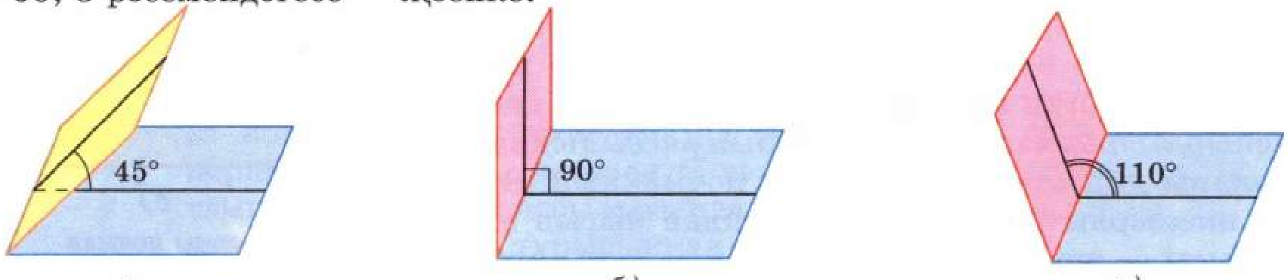
Икекырлы почмакның сызыкча почмагы

Рәс. 59

Икекырлы почмакның барлык сызыкча почмаклары бер-берсенә тигез икәнен исбатлыйк. AOB һәм $A_1O_1B_1$ сызыкча почмакларын тикшерик (рәс. 59, *б*). OA һәм O_1A_1 нурлары бер кырда яталар һәм OO_1 турысына перпендикуляр, шуңа күрә алар бердәй юнәлешле. Нәкъ шулай ук OB һәм O_1B_1 нурлары да бердәй юнәлешле. Шуңа күрә $\angle A_1O_1B_1 = \angle AOB$ (бердәй юнәлешле почмаклар буларак).

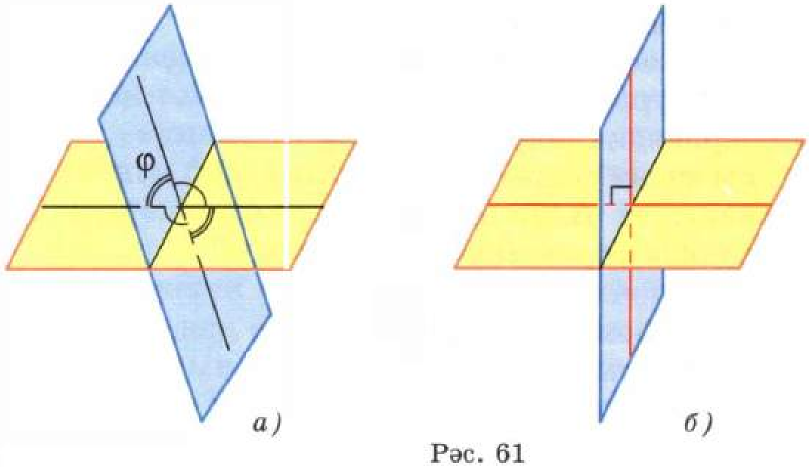
Икекырлы почмакның сызыкча почмагының градуслы үлчәме **икекырлы почмакның градуслы үлчәме** дип атала. 60, *а* рәсемендә икекырлы почмакның градуслы үлчәме 45° ка тигез. Гадәттә, кыскача икекырлы почмак 45° ка тигез, диләр.

Икекырлы почмак 90° ка тигез (90° тан кечерәк, 90° тан зуррак) булса, ул **туры (кысынкы, җәенке)** дип атала. Икекырлы почмакларның 60, *б* рәсемендә сурәтләнгәне — туры, 60, *а* рәсемендәгесе — кысынкы, ә 60, *в* рәсемендәгесе — җәенке.

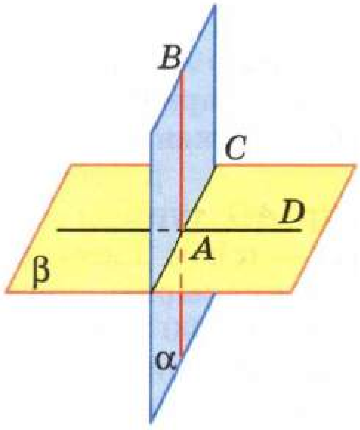


а *б)* *в)*

Рәс. 60



Рәс. 61



Рәс. 62

23 Ике яссылыкның перпендикулярлык билгесе

Кисешүче ике яссылык уртак кабыргалы дүрт икекырлы почмак төзи (рәс. 61, *а*). Бу икекырлы почмакларның берсе φ гә тигез булса, калган өч почмак $180° - φ$, φ һәм $180° - φ$ гә тигез (ни өчен шулай икәнен аңлатыгыз). Аерым алганда, почмакларның берсе туры ($φ = 90°$ булса, калган өчесе шулай ук туры почмак була. Әгәр φ калган почмакларның һәркайсыннан зур булмаса, **кисешүче яссылыклар арасындагы почмак** φ гә тигез, диләр. Биредә $0° < φ \leqslant 90°$ икәнлеге ачык аңлашыла.

Билгеләмә

Кисешүче ике яссылык арасындагы почмак 90° ка тигез булса, алар **перпендикуляр** (үзара перпендикуляр) дип атала (рәс. 61, б).

Бүлмәнең стена белән идән, стена белән түшәм яссылыклары үзара перпендикуляр яссылыкларга мисал булып тора. Үзара перпендикуляр яссылыклар белән төзелгән дүрт икекырлы почмак та туры икәнлеге үзеннән-үзе аңлашыла.

Ике яссылыкның перпендикулярлык билгесен тикшерик.

Теорема

Әгәр ике яссылыкның берсе икенче яссылыкка перпендикуляр туры аша үтсә, андый яссылыклар перпендикуляр була.

Исбатлау

Шундый α һәм β яссылыкларын тикшерик: α яссылыгы β яссылыгына перпендикуляр булган һәм аның белән *A* ноктасында кисешүче *AB* турысы аша үтә

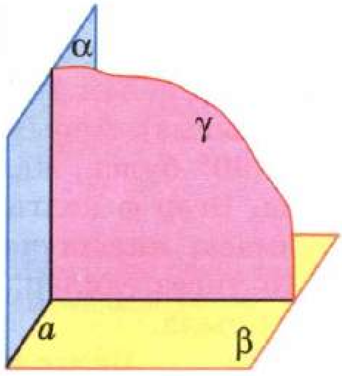
(рәс. 62). $\alpha\perp\beta$ икәнен исбатларбыз. α һәм β яссылыклары ниндидер AC турысы буенча кисешәләр, өстәвенә $AB\perp AC$, чөнки шарт буенча $AB\perp\beta$, димәк, AB турысы β яссылыгында яткан теләсә нинди турыга перпендикуляр.

β яссылыгында AC турысына перпендикуляр AD турысы үткәрәбез. Ул вакытта BAD почмагы — α һәм β яссылыклары кисешкәндә барлыкка килгән икекырлы почмакның сызыкча почмагы. Ләкин $\angle BAD = 90°$ (чөнки $AB\perp\beta$). Димәк, α һәм β яссылыклары арасындагы почмак $90°$ ка тигез, ягъни $\alpha\perp\beta$. Теорема исбатланды.

Нәтиҗә

Бирелгән ике яссылыкның кисешү турысына перпендикуляр яссылык бу яссылыкларның һәркайсына перпендикуляр була (рәс.63).

24 Турыпочмаклы параллелепипед



Әгәр $\gamma\perp a$ булса, ул вакытта $\gamma\perp\alpha$ һәм $\gamma\perp\beta$

Рәс. 63

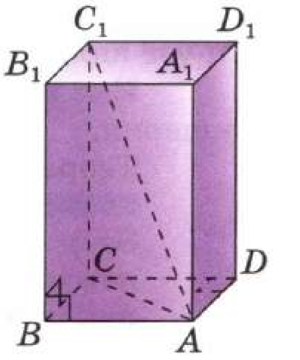
Параллелепипедның нигезләре — турыпочмаклык, ә ян кабыргалары нигезенә перпендикуляр булса, параллелепипед **турыпочмаклы** дип атала. Күп предметлар турыпочмаклы параллелепипед формасында: тартмалар, ящиклар, бүлмәләр һ. б. 64 нче рәсемдә турыпочмаклы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеды сурәтләнгән. $ABCD$ һәм $A_1B_1C_1D_1$ турыпочмаклыклары аның нигезләре булып хезмәт итә, ә AA_1, BB_1, CC_1 һәм DD_1 ян кабыргалары нигезгә перпендикуляр. Моннан $AA_1\perp AB$ икәнлеге килеп чыга, ягъни AA_1B_1B ян кыры — турыпочмаклык. Калган ян кырлары турында да шуны ук әйтергә мөмкин. Шулай итеп, без турыпочмаклы параллелепипедның түбәндәге үзлеген нигезләдек.

1°. Турыпочмаклы параллелепипедның алты кыры да — турыпочмаклык.

Параллелепипедның чиктәш кырлары урнашкан ярымъяссылыклар **параллелепипедның икекырлы почмаклары** дип аталган икекырлы почмаклар төзи.

Тагын бер үзлекне мөстәкыйль рәвештә исбатлагыз.

2°. Турыпочмаклы параллелепипедның барлык икекырлы почмаклары да туры.



Турыпочмаклы параллелепипед

Рәс. 64

Хәзер турыпочмаклы параллелепипедның иң мөһим үзлекләреннән берсен карауга күчәрбез.

Уртак түбәгә ия булган өч кабырганың озынлыклары турыпочмаклы параллелепипедның **үлчәнешләре** дип атала. Мәсәлән, 64 нче рәсемдә сурәтләнгән параллелепипедның үлчәнешләре сыйфатында AB, AD һәм AA_1 кабыргаларының озынлыкларын алырга мөмкин.

Көндәлек тормышта турыпочмаклы параллелепипед формасындагы бүлмәнең зурлыгы турында сөйләгәндә, «үлчәнешләре» сүзе урынына, гадәттә, «буе», «киңлеге» һәм «биеклеге» сүзләре кулланыла. Бүлмәнең буе, киңлеге һәм биеклеге аның үлчәнешләре икәнлеге үзеннән-үзе аңлашыла.

Параллелепипедның үлчәнешләре белән бәйле үзлеген әйтеп биргәнгә кадәр турыпочмаклыкта диагональнең квадраты чиктәш якларының квадратлары суммасына тигез икәнлеген искә төшереп китик.

Чиктәш якларның озынлыкларын турыпочмаклыкның үлчәнешләре дип атарга мөмкин, шуңа күрә **турыпочмаклык диагоналенең квадраты аның ике үлчәнешенең квадратлары суммасына тигез** дияргә мөмкин. Турыпочмаклы параллелепипед та шушыңа охшаш үзлеккә ия икән.

Теорема

Турыпочмаклы параллелепипед диагоналенең квадраты аның өч үлчәнешенең квадратлары суммасына тигез.

Исбатлау

Игътибарны $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеды сурәтләнгән 64 нче рәсемгә юнәлтәбез һәм

$$AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$$

икәнен исбатларбыз.

CC_1 кабыргасы $ABCD$ нигезенә перпендикуляр булгач, ACC_1 почмагы туры. Турыпочмаклы ACC_1 өчпочмагыннан Пифагор теоремасы буенча табабыз:

$$AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2.$$

Ләкин AC — $ABCD$ турыпочмаклыгының диагонале, шуңа күрә $AC^2 = AB^2 + AD^2$. Моннан тыш, $CC_1 = AA_1$. Шулай булгач, $AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$.

Теорема исбатланды.

Нәтиҗә

Турыпочмаклы параллелепипедның диагональләре тигез.

Өч үлчәнеше дә тигез булган турыпочмаклы параллелепипед **куб** дип атала. Кубның барлык кырлары да — бер-берсенә тигез квадратлар.

25* Өчкырлы почмак

Уртак башлангычы O булган һәм бер яссылыкта ятмаган өч нур: OA, OB һәм OC ны тикшерик. AOB, BOC, COA почмакларыннан һәм аларның эчке

өлкәсеннән торган фигура $OABC$ **өчкырлы почмагы** дип, ә күрсәтелгән почмаклар бу **өчкырлы почмакның яссы почмаклары** дип атала.

Өчкырлы почмакның һәр яссы почмагы калган ике яссы почмагының суммасыннан кечерәк икәнен исбатларбыз. $OABC$ өчкырлы почмагын тикшерик һәм аныклык өчен $\angle BOC \geqslant \angle AOC \geqslant \angle AOB$ дип исәплик. Безгә $\angle BOC < \angle AOB + \angle AOC$ икәнен исбатлау җитә (ни өчен икәнен аңлатып бирегез). Әгәр $\angle BOC = \angle AOB$ булса, тигезсезлекнең дөреслеге күренеп тора. Киресенчә ($\angle BOC > \angle AOB$) булганда, түбәндәгечә эшләрбез.

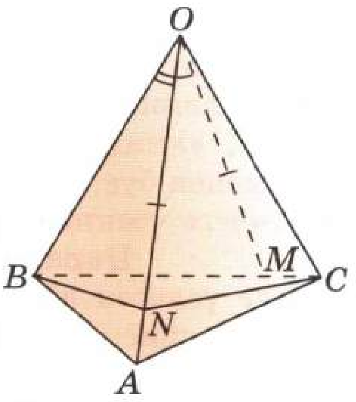
BC нурында M ноктасын MOB почмагы AOB почмагына тигез булырлык итеп сайлап алабыз (рәс. 65, *а*). $\angle BOC > \angle AOB$ булганга күрә, M ноктасы B һәм C нокталары арасында ятар. Аннары OA нурында $OM = ON$ кисемтәсен салабыз. BON һәм BOM өчпочмаклары өчпочмаклар тигезлегенең беренче билгесе буенча тигез, шуңа күрә $BN = BM$.

BCN өчпочмагында: $BM + MC = BC < BN + NC = BM + NC$, моннан табабыз: $MC < NC$.

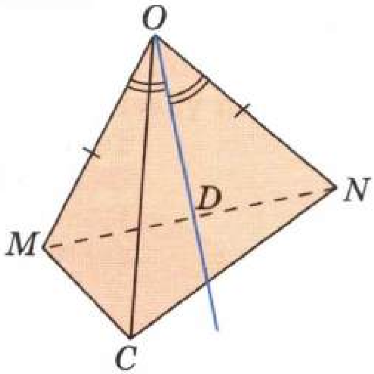
Кабыргасы OC булган икекырлы почмакны M, N, O һәм C нокталары бер яссылыкта ятарлык итеп җәябез һәм MON өчпочмагының OD биссектрисасын үткәрәбез (рәс. 65, *б*). MON өчпочмагы тигезьянлы булганлыктан, OD кисемтәсе аның медианасы да һәм биеклеге дә була: $MD = DN$, $OD \perp MN$. Шулай итеп, OD турысы MNC өчпочмагында MN ягының уртасы аша үтә һәм шул якка перпендикуляр. Димәк, ул MC һәм NC якларының зуррагын, ягъни NC ягын кисеп үтә (моны исбатлагыз). Шуңа күрә $\angle MOC < \angle NOC$. Хәзер игътибарны 65, *а* рәсеменә юнәлтик. Без

$$\angle BOC = \angle MOB + \angle MOC = \angle AOB + \angle MOC < \angle AOB + \angle NOC = \angle AOB + \angle AOC$$

икәнен күрәбез, безгә шуны исбатларга кирәк иде дә.



а)



б)

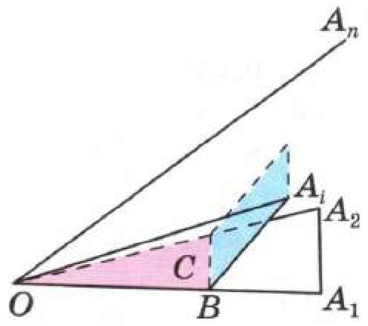
Рәс. 65

26* Күпкырлы почмак

A_1OA_2, A_2OA_3, ... , A_nOA_1 почмакларыннан һәм аларның чиктәш почмаклары (ягъни A_1OA_2 һәм A_2OA_3, ... , A_nOA_1 һәм A_1OA_2) бер яссылыкта ятмаслык итеп, ә чиктәш булмаган якларының (аларның эчке өлкәләре белән) уртак нокталары булмаслык итеп, эчке өлкәләреннән төзелгән фигураны тикшерик. Андый фигура **күпкырлы** $OA_1 A_2 \ldots A_n$ **почмагы** дип атала. Бу

күпкырлы почмакны тәзүче почмаклар — **яссы почмаклар**, OA_1, OA_2 , ... , OA_n нурлары — **кабыргалар**, ә O ноктасы бу күпкырлыкның **түбәсе** дип атала. Өчкырлы почмак күпкырлы почмакка мисал булып тора.

Күпкырлы почмак үзенең һәр яссы почмагы яссылыгыннан бер якта ятса, ул **кабарынкы** дип атала. Аерым алганда, өчкырлы почмак — кабарынкы (ни өчен икәнен аңлатып бирегез).



Рәс. 66

Теләсә нинди кабарынкы күпкырлы почмакның барлык кабыргаларын кисүче яссылык барлыгын исбатларбыз. Күпкырлы OA_1A_2 ... A_n почмагының OA_1 һәм OA_2 кабыргаларын карыйк. Әлеге күпкырлы почмак кабарынкы булганга күрә, A_3, ... , A_n нокталары OA_1A_2 яссылыгыннан бер якта яталар.

OA_1A_2 өчпочмагының BC урта сызыгын үткәрәбез (рәс.66) һәм OA_3, ... , OA_n кабыргалары арасыннан $OBCA_i$ икекырлы почмагының зурлыгы иң кечкенә кыйммәткә ия булган OA_i кабыргасын сайлап алабыз (рәсемдә бу икекырлы почмакның кырлары буялган). $OBCA_i$ икекырлы почмагын ике икекырлыкка бүлүче һәм чиге BC булган ярымъяссылыкны карыйк (рәсемдә бу ярымъяссылык сурәтләнмәгән). A_1, ... , A_n түбәләренең барысы да бу ярымъяссылыкны эченә алган α яссылыгыннан бер якта, ә O ноктасы α яссылыгының икенче ягында ята (ни өчен икәнен аңлатып бирегез). Димәк, α яссылыгы OA_1, ... , OA_n кабыргаларының барысын да кисеп үтә. Раслау исбатланды.

Кабарынкы күпкырлы почмаклар тагын бер мөһим үзлеккә ия.

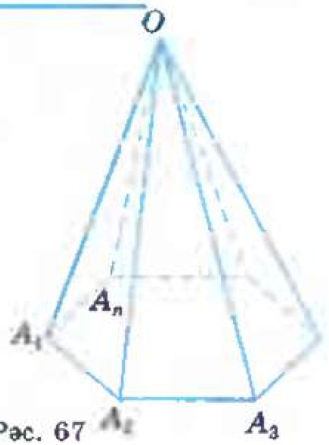
Теорема

Кабарынкы күпкырлы почмакларда яссы почмакларның суммасы 360° тан кечерәк.

Исбатлау

Түбәсе O булган кабарынкы күпкырлы почмакны тикшерик һәм аның барлык кабыргаларын ниндидер A_1, A_2 , ..., A_n нокталарында кисүче яссылык үткәрик (рәс. 67). Табабыз:

$$\angle A_1OA_2 + \angle A_2OA_3 + ... + \angle A_nOA_1 =$$
$$= (180° - \angle OA_1A_2 - \angle OA_2A_1) + (180° - \angle OA_2A_3 - \angle OA_3A_2) + ...$$
$$... + (180° - \angle OA_nA_1 - \angle OA_1A_n) = 180° \cdot n -$$
$$- (\angle OA_1A_n + \angle OA_1A_2) - (\angle OA_2A_1 + \angle OA_2A_3) - ...$$
$$... - (\angle OA_nA_{n-1} + \angle OA_nA_1).$$



Рәс. 67

Ләкин өчкырлы почмакның ике яссы почмагының суммасы өченче яссы почмагыннан зуррак (25 нче п.ны кара), шуңа күрә

$$\angle OA_1A_n + \angle OA_1A_2 > \angle A_nA_1A_2, \dots,$$
$$\angle OA_nA_{n-1} + \angle OA_nA_1) > \angle A_{n-1}A_nA_1.$$

Димәк, эзләнелгән сумма

$$180° \cdot n - (\angle A_nA_1A_2 + \angle A_1A_2A_3 + \dots + \angle A_{n-1}A_nA_1) =$$
$$= 180° \cdot n - 180° \cdot (n-2) = 360°$$ тан кечерәк.

Теорема исбатланды.

Мәсьәләләр

166 Перпендикуляр булмаган α һәм β яссылыклары MN турысы буйлап кисешәләр. β яссылыгында A ноктасыннан MN турысына AB перпендикуляры һәм шул ук A ноктасыннан α яссылыгына AC перпендикуляры үткәрелгән. $\angle ABC$ — икекырлы $AMNC$ почмагының сызыкча почмагы икәнен исбатлагыз.

167 $DABC$ тетраэдрының барлык кабыргалары да тигез, M ноктасы — AC кабыргасының уртасы. $\angle DMB$ — икекырлы $BACD$ почмагының сызыкча почмагы икәнен исбатлагыз.

168 Икекырлы почмак φ гә тигез. Бу почмакның бер кырында икенче кыр яссылыгыннан d ераклыгындагы нокта ята. Бу ноктадан икекырлы почмакның кабыргасына кадәр ераклыкны табыгыз.

169 Бер кыры уртак, калган ике кыры бер яссылыкның төрле ярымъяссылыклары булган ике икекырлы почмак бирелгән. Бу икекырлы почмакларның суммасы 180° ка тигез икәнен исбатлагыз.

170 AC ягы α яссылыгында яткан ABC өчпочмагының B түбәсеннән бу яссылыкка BB_1 перпендикуляры үткәрелгән. $AB = 2$ см, $\angle BAC = 150°$ һәм $BACB_1$ икекырлы почмагы 45° ка тигез булса, B ноктасыннан AC турысына һәм α яссылыгына кадәр ераклыкларны табыгыз.

171 Турыпочмаклы тигезьянлы өчпочмакның гипотенузасы α яссылыгында ята, ә катеты бу яссылыкка 30° лы почмак ясап авышкан. α яссылыгы белән өчпочмак яссылыгы арасындагы почмакны табыгыз.

172 Туры почмагы C булган турыпочмаклы ABC өчпочмагының AC катеты α яссылыгында ята, ә α һәм ABC яссылыклары арасындагы почмагы 60° ка тигез. $AC = 5$ см, $AB = 13$ см булса, B ноктасыннан α яссылыгына кадәр ераклыкны табыгыз.

173 $ABCD$ тетраэдрында CD кабыргасы ABC яссылыгына перпендикуляр, $AB = BC = AC = 6$, $BD = 3\sqrt{7}$. Икекырлы $DACB$, $DABC$, $BDCA$ почмакларын табыгыз.

174 $ABCD$ тетраэдрында DAB, DAC, ACB почмаклары туры, $AC = CB = 5$, $DB = 5\sqrt{5}$ булса, икекырлы $ABCD$ почмагын табыгыз.

175 Тетраэдрның барлык кабыргалары да тигез булса, аның барлык икекырлы почмаклары да тигез икәнен исбатлагыз. Бу почмакларны табыгыз.

176 *ABCD* ромбының *AD* ягы аша, *BADM* икекырлы почмагы 60° ка тигез булырлык итеп, *ADM* яссылыгы үткәрелгән. $\angle BAD = 45°$ һәм *B* ноктасыннан *ADM* яссылыгына кадәр ераклык $4\sqrt{3}$ кә тигез булса, ромбның ягын табыгыз.

177 Бирелгән ике яссылыкның кисешү турысына перпендикуляр яссылык бу яссылыкларның һәркайсына перпендикуляр икәнен исбатлагыз.

178 α һәм β яссылыклары үзара перпендикуляр һәм *c* турысы буйлап кисешәләр. α яссылыгындагы *c* турысына перпендикуляр теләсә нинди туры β яссылыгына перпендикуляр икәнен исбатлагыз.

Чишү

α яссылыгында *c* турысына перпендикуляр теләсә нинди *AC* турысы үткәрәбез ($C \in c$). $CA \perp \beta$ икәнен исбатлыйк.

β яссылыгында *C* ноктасы аша *c* турысына перпендикуляр *CB* турысы үткәрәбез. $CA \perp c$, һәм $CB \perp c$ булганга күрә, $\angle ACB$ — α һәм β яссылыклары белән төзелгән икекырлы почмаклардан берсенең сызыкча почмагы. Мәсьәләнең шарты буенча, $\alpha \perp \beta$, шуңа күрә $\angle ACB$ — туры, ягъни $CA \perp CB$. Шулай итеп, *CA* турысы β яссылыгындагы кисешүче *c* һәм *CB* турыларына перпендикуляр, шуңа күрә $CA \perp \beta$.

179 α һәм β яссылыклары үзара перпендикуляр. α яссылыгының нindидер ноктасыннан β яссылыгына перпендикуляр туры үткәрелгән. Бу турының α яссылыгында ятканын исбатлагыз.

180 Бер үк яссылыкка перпендикуляр булган яссылык һәм аңарда ятмаган туры параллель икәнен исбатлагыз.

181 α һәм β яссылыклары *a* турысы буйлап кисешәләр. *M* ноктасыннан α һәм β яссылыкларына тиңдәшле рәвештә *MA* һәм *MB* перпендикулярлары үткәрелгән. *a* турысы *AMB* яссылыгын *C* ноктасында кисеп үтә. $MC \perp a$ икәнен исбатлагыз.

182 α һәм β яссылыклары үзара перпендикуляр һәм *a* турысы буйлап кисешәләр. *M* ноктасыннан бу яссылыкларга *MA* һәм *MB* перпендикулярлары үткәрелгән. *a* турысы *AMB* яссылыгын *C* ноктасында кисеп үтә. а) *ACBM* дүртпочмагының турыпочмаклык икәнен исбатлагыз; б) $AM = m$, $BM = n$ булса, *a* турысыннан *M* ноктасына кадәр ераклыкны табыгыз.

183 α һәм β яссылыклары *a* турысы буйлап кисешәләр һәм γ яссылыгына перпендикулярлар. *a* турысының γ яссылыгына перпендикуляр икәнен исбатлагыз.

184 *ABC* һәм *ABD* өчпочмакларының *AB* уртак ягы 10 см га тигез. Бу өчпочмакларның яссылыклары үзара перпендикуляр. а) Өчпочмаклар тигезьяклы; б) гипотенузасы *AB* булган турыпочмаклы тигезьянлы өчпочмаклар булса, *CD* ны табыгыз.

185 a турысы α яссылыгына перпендикуляр түгел. a турысы аша үтүче һәм α яссылыгына перпендикуляр яссылык барлыгын исбатлагыз.

Чишү

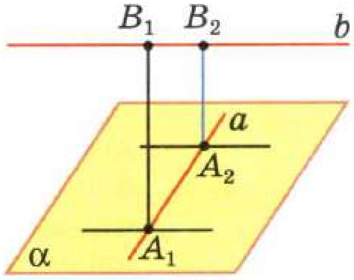
a турысының теләсә нинди M ноктасы аша α яссылыгына перпендикуляр p турысы үткәрәбез дә a һәм p турылары аша үтүче β яссылыгын тикшерәбез. β — эзләнелә торган яссылык, чөнки ул a турысы аша үтә һәм ике яссылыкның перпендикулярлык билгесе буенча α яссылыгына перпендикуляр.

186 Бирелгән a һәм b чалышма турыларын кисүче һәм аларның һәркайсына перпендикуляр туры барлыгын һәм аның бер генә икәнен исбатлагыз.

Чишү

a турысы аша үтүче һәм b турысына параллель α яссылыгын тикшерик. $\beta \perp \alpha$ һәм $\gamma \perp \alpha$ булырлык итеп, a һәм b турылары аша β һәм γ яссылыклары үткәрәбез (185 нче мәсьәлә). β һәм γ яссылыкларының кисешү турысы p — эзләнелгән туры икәнен мөстәкыйль рәвештә исбатлагыз.

p — мәсьәләнең шартын канәгатьләндерүче бердәнбер туры булуын исбатлыйк. Бирелгән a һәм b чалышма турыларын кисүче һәм аларның һәркайсына перпендикуляр ике туры: A_1B_1 һәм A_2B_2 бар дип фараз итик (рәс. 68). A_1B_1 һәм A_2B_2 турылары α яссылыгына перпендикуляр (ни өчен икәнен аңлатыгыз), шуңа күрә алар параллель. Моннан a һәм b чалышма турылары бер яссылыкта ятканлыгы килеп чыга, бу — чалышма турылар билгеләмәсенә каршы килә.



Рәс. 68

187 Турыпочмаклы параллелепипедның үлчәнешләре: а) 1, 1, 2; б) 8, 9, 12; в) $\sqrt{39}$, 7, 9 га тигез булса, аның диагонален табыгыз.

188 Кубның кабыргасы a га тигез. Кубның диагонален табыгыз.

189 а) Куб кырының диагонале m га тигез; б) кубның диагонале d га тигез булса, аның түбәсеннән бу түбә ятмаган теләсә кайсы кыр яссылыгына кадәр ераклыкны табыгыз.

190 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы бирелгән. а) ABB_1C; б) ADD_1B; в) A_1BB_1K (биредә K — A_1D_1 кабыргасының уртасы) икекырлы почмакларын табыгыз.

191 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы бирелгән. ABC_1 һәм A_1B_1D яссылыкларының перпендикуляр икәнен исбатлагыз.

192 Кубның диагонале белән аның бер кыр яссылыгы арасындагы почмагының тангенсын табыгыз.

193 Турыпочмаклы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедында $D_1B = d$, $AC = m$, $AB = n$. а) A_1C_1 турысы белән ABC яссылыгы; б) ABB_1 һәм

DCC_1 яссылыклары; в) DD_1 турысы белән ACC_1 яссылыгы арасындагы ераклыкны табыгыз.

194 Кубның кабыргасы a га тигез. а) Кубның диагонален һәм кубның кабыргасын; б) кубның диагонален һәм куб кырының диагонален эченә алган чалышма турылар арасындагы ераклыкны табыгыз.

195 Турыпочмаклы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедында $AC_1 = 12$ см һәм BD_1 диагонале AA_1D_1D кыры яссылыгы белән — 30° лы почмак, ә DD_1 кабыргасы белән 45° лы почмак төзесә, аның үлчәнешләрен табыгыз.

196 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубын сурәтләгез һәм аның а) AA_1 кабыргасы аша үтүче һәм BB_1D_1 яссылыгына перпендикуляр; б) AB кабыргасы аша үтүче һәм CDA_1 яссылыгына перпендикуляр яссылык белән кисемен төзегез.

II бүлеккә сораулар

1 Раслама дөресме: әгәр пространствода ике туры өченче турыга перпендикуляр булса, ул вакытта бу турылар параллель? Өч туры да бер яссылыкта ятканда, бу раслама дөресме?

2 Параллель b һәм c турылары α яссылыгында яталар, ә a турысы b турысына перпендикуляр. Раслама дөресме: а) a турысы c турысына перпендикуляр; б) a турысы α яссылыгын кисеп үтә?

3 a турысы α яссылыгына перпендикуляр, ә b турысы бу яссылыкка перпендикуляр түгел. a һәм b турылары параллель булырмы?

4 a турысы α яссылыгына параллель, ә b турысы бу яссылыкка перпендикуляр. a һәм b турылары үзара перпендикулярмы?

5 a турысы α яссылыгына параллель, ә b турысы бу яссылыкка перпендикуляр. a һәм b турыларына перпендикуляр туры бармы?

6 Бирелгән яссылыкка перпендикуляр һәм бирелгән турыны кисүче барлык турылар бер яссылыкта яталар дип раслау дөресме?

7 Һәркайсы өченче яссылыкка перпендикуляр булган ике яссылык: а) параллель яссылыклар; б) перпендикуляр яссылыклар булуы мөмкинме?

8 Пространстводагы нокта аша һәр икесе үзара перпендикуляр булган өч яссылык үткәреп буламы?

9 Квадратның диагонале ниндидер яссылыкка перпендикуляр. Квадратның икенче диагонале бу яссылыкка карата ничек урнашкан?

10 а) Тетраэдр; б) параллелепипедның ничә икекырлы почмагы бар?

Өстәмә мәсьәләләр

197 BM кисемтәсе $ABCD$ турыпочмаклыгы яссылыгына перпендикуляр. CD турысы MBC яссылыгына перпендикуляр икәнен исбатлагыз.

198 A ноктасы α яссылыгында ята, ә B ноктасы бу яссылыктан 9 см ераклыкта урнашкан. M ноктасы AB кисемтәсен, A ноктасыннан

башлап исәпләгәндә, 4 : 5 чагыштырмасында бүлә. M ноктасыннан α яссылыгына кадәр ераклыкны табыгыз.

199 S ноктасы турыпочмаклы өчпочмак түбәләреннән тигез ераклыкта һәм бу өчпочмак яссылыгында ятмый. SM турысы (биредә M — гипотенузаның уртасы) өчпочмак яссылыгына перпендикуляр икәнен исбатлагыз.

200 Күппочмакны камаучы әйләнәнең үзәге аша күппочмак яссылыгына перпендикуляр үтүче турының теләсә кайсы ноктасы бу күппочмакның түбәләреннән тигез ераклыкта икәнен исбатлагыз.

201 P һәм Q нокталары AB кисемтәсенең очларыннан тигез ераклыкта булса, AB һәм PQ чалышма турылары арасындагы почмакны табыгыз.

202 Нокта турыпочмаклы өчпочмак түбәләренең һәркайсыннан 10 см ераклыкта. Өчпочмакның гипотенузага үткәрелгән медианасы 5 см га тигез булса, бу нокта өчпочмак яссылыгыннан нинди ераклыкта урнашкан?

203 ABC өчпочмагына камаулы әйләнәнең үзәге O аша, өчпочмак яссылыгына перпендикуляр итеп, OK турысы үткәрелгән. $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см, $OK = 4$ см булса, K ноктасыннан өчпочмак якларына кадәр ераклыкны табыгыз.

204 OM турысы төзек ABC өчпочмагы яссылыгына перпендикуляр һәм бу өчпочмакның үзәге O аша үтә, $OM = a$, $\angle MCO = \varphi$. а) M ноктасыннан ABC өчпочмагының һәр түбәсенә һәм AB, BC, CA турыларына кадәр ераклыкны; б) ABC өчпочмагын камаучы әйләнәнең озынлыгын; в) ABC өчпочмагының мәйданын табыгыз.

205 Турыпочмаклы ABC өчпочмагында туры почмагының түбәсе C аша, өчпочмак яссылыгына перпендикуляр итеп, CD турысы үткәрелгән. $CA = 3$ дм, $CB = 2$ дм, $CD = 1$ дм булса, ABD өчпочмагының мәйданын табыгыз.

206 Өчпочмакның яклары 17 см, 15 см һәм 8 см га тигез. Өчпочмакта кечерәк почмагының түбәсе A аша, өчпочмак яссылыгына перпендикуляр итеп, AM турысы үткәрелгән. $AM = 20$ см икәне билгеле булса, M ноктасыннан өчпочмакның кечерәк ягын эченә алган турыга кадәр ераклыкны табыгыз.

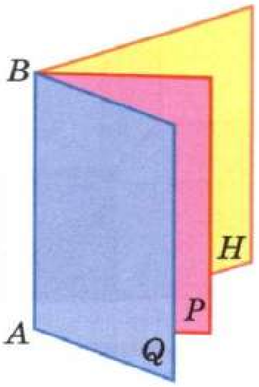
207 ABC өчпочмагында $AB = BC = 13$ см, $AC = 10$ см бирелгән. M ноктасы AB, BC һәм AC турыларыннан $8\frac{2}{3}$ см ераклыкта урнашкан. M ноктасының ABC яссылыгына проекциясе өчпочмак эчендә ятса, M ноктасыннан бу яссылыкка кадәр ераклыкны табыгыз.

208 α яссылыгыннан 9 см ераклыктагы K ноктасыннан KL һәм KM авышмалары үткәрелгән. Алар үзара туры почмак, ә α яссылыгы белән тиңдәшле рәвештә 45° һәм 30° лы почмаклар төзи. LM кисемтәсен табыгыз.

209 Тигез AB һәм AC кисемтәләре белән A ноктасы аша үтүче α яссылыгы арасындагы почмаклар тиңдәшле рәвештә 40° һәм 50° ка

тигез. B һәм C ноктaларыннан α яссылыгына кадәрге ераклыкларны чагыштырыгыз.

210 69 нчы рәсемдә икекырлы $HABP$ һәм $PABQ$ почмаклары тигез. ABP яссылыгының һәр ноктасы ABH һәм ABQ яссылыкларыннан тигез ераклыкта икәнен исбатлагыз.



Рәс. 69

211 Төзек KDM өчпочмагының һәм $KMNP$ квадратының яссылыклары үзара перпендикуляр. $KM = a$ булса, DN ны табыгыз.

212 C ноктасы — D ноктасының ABC өчпочмагы яссылыгына проекциясе. ABD өчпочмагының мәйданы $\frac{S}{\cos \alpha}$ га тигез икәнен исбатлагыз (биредә S — ABC өчпочмагының мәйданы, α исә — ABC һәм ABD яссылыклары арасындагы почмак).

213 Төзек ABC һәм DBC өчпочмаклары D түбәсе ABC өчпочмагының үзәгенә проекцияләнерлек итеп урнашкан. Бу өчпочмакларның яссылыклары арасындагы почмакны исәпләп чыгарыгыз.

214 ABC_1D_1 квадраты — $ABCD$ турыпочмаклыгының α яссылыгына проекциясе. $AB : BC = 1 : 2$ булса, α яссылыгы белән $ABCD$ турыпочмаклыгы яссылыгы арасындагы φ почмагын исәпләп чыгарыгыз.

215 Параллель AB һәм CD турылары $60°$ ка тигез булган икекырлы почмакның төрле кырларында ята. A һәм D нокталары икекырлы почмакның кабыргасыннан тиңдәшле рәвештә 8 см һәм 6,5 см ераклыкта. AB һәм CD турылары арасындагы ераклыкны табыгыз.

216 A һәм B нокталары $120°$ ка тигез булган икекырлы почмакның кабыргасында ята. AC һәм BD кисемтәләре икекырлы почмакның төрле кырларында кабыргасына перпендикуляр итеп үткәрелгән. $AB = AC = BD = a$ булса, CD кисемтәсен табыгыз.

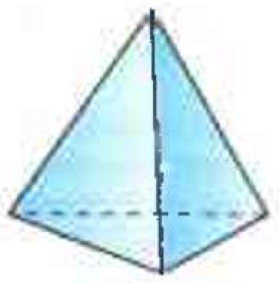
217 Турыпочмаклы параллелепипедның уртак түбәгә ия булган өч кырының мәйданы 404 дм^2, ә аның кабыргалары 3, 7 һәм 8 саннарына пропорциональ. Параллелепипедның диагонален табыгыз.

III бүлек
Күпкырлыклар

§ 1 Күпкырлык төшенчәсе. Призма

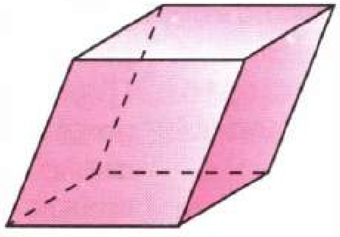
27 Күпкырлык төшенчәсе

I бүлектә без тетраэдр һәм параллелепипедны тикшердек: тетраэдр — дүрт өчпочмактан төзелгән өслек (рәс. 70, *а*), параллелепипед — алты параллелограммнан төзелгән өслек (рәс. 70, *б*). Бу өслекләрнең һәркайсы нинди дә булса геометрик җисемне чикли, шул җисемне пространствоның калган кисәгеннән аерып тора.



а)

Тетраэдр



б)

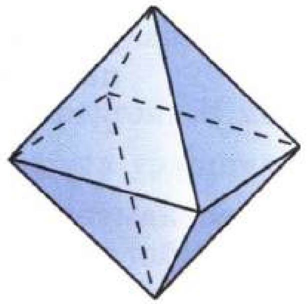
Параллелепипед

Рәс. 70

Күппочмаклардан төзелгән һәм ниндидер геометрик җисемне чикләп торучы өслек күпкырлы өслек яки **күпкырлык** дип атала. Тетраэдр һәм параллелепипед — күпкырлык мисаллары. 71 нче рәсемдә тагын бер күпкырлык — **октаэдр** сурәтләнгән. Ул сигез өчпочмактан төзелгән. Күпкырлык белән чикләнгән җисемне еш кына шулай ук күпкырлык дип атыйлар.

Күпкырлыкны төзүче күппочмаклар аның **кырлары** дип атала*. Тетраэдр һәм октаэдрның кырлары — өчпочмаклар (рәс. 70, *а* һәм 71), параллелепипедның кырлары параллелограммнар була (рәс. 70, *б*). Кырларның яклары күпкырлыкның **кабыргалары** дип, ә кабыргаларның очлары **түбәләре** дип атала. Күпкырлыкның бер кырда ятмаган ике түбәсен тоташтыручы кисемтә аның **диагонале** дип атала.

Яссылыкның ике ягында да күпкырлыкның нокталары булса, **ул кисүче яссылык** дип, ә күпкырлык һәм кисүче яссылыкның уртак кисәге күпкырлыкның **киселеме** дип атала.



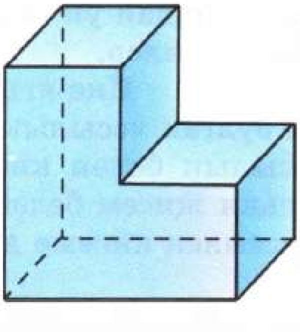
Октаэдр

Рәс. 71

Кабарынкы һәм **кабарынкы булмаган** күпкырлыклар була. Күпкырлык аның һәр кыр яссылыгыннан бер якта урнашкан булса, ул **кабарынкы** дип атала. Тетраэдр, параллелепипед һәм октаэдр — кабарынкы күпкырлыклар. 72 нче рәсемдә кабарынкы булмаган күпкырлык сурәтләнгән.

* Күпкырлыкның берниндн дә ике күрше кыры бер яссылыкта ятмый дип уйланыла.

Кабарынкы күпкырлыкның барлык кырлары да кабарынкы күппочмаклар икәнлеге ачык. **Кабарынкы күпкырлыкта аның һәр түбәсе янындагы барлык яссы почмакларының суммасы 360° тан кечерәк** икәнен искәртеп китәбез. 73 нче рәсем бу расламаны ачыклый: күпкырлык кабыргасы буенча «киселгән» һәм аның уртак түбәгә ия булган барлык кырлары α яссылыгында урнашкан булып чыкты. A түбәсе янындагы барлык яссы почмакларның суммасы, ягъни $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$, 360° тан кечерәк икәнлеге ачык күренә.



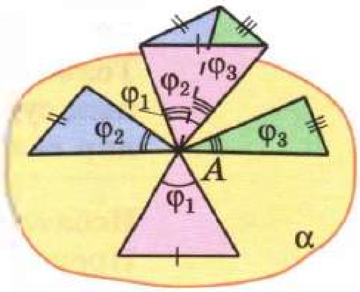
Кабарынкы булмаган күпкырлык

Рәс. 72

28* Геометрик җисем

Күпкырлык ниндидер геометрик җисемне чикләгәнен әйткән идек инде. Бу төшенчәне ачыклыйк.

M ноктасына теләсә никадәр якын нокталар арасында (бу ноктаның үзен дә кертеп) F фигурасыныкы булган нокталар һәм бу фигураныкы булмаган нокталар да булса, M ноктасы бирелгән F фигурасының **чик ноктасы** дип атала. Фигураның барлык чик нокталары күплеге аның **чиге** дип атала. Мәсәлән, шарның чиге сфера була.



Рәс. 73

Фигураның чик ноктасы булмаган нокта аның **эчке ноктасы** дип атала. Фигураның һәр эчке ноктасы пространствоның аңа җитәрлек дәрәҗәдә якын булган барлык нокталарының шулай ук фигураныкы булуы белән характерлана. Әйтик, шарның сферада — аның чигендә ятмаган теләсә кайсы ноктасы шарның эчке ноктасы була.

Фигураны нинди дә булса сфера эченә урнаштырып булса, ул **чикләнгән** дип атала. Шар, тетраэдр, параллелепипед — чикләнгән, ә туры һәм яссылык чикләнмәгән фигуралар икәне ачык.

Фигураның теләсә нинди ике ноктасын тулысынча бирелгән фигураныкы булган өзлексез сызык белән тоташтырып булса, ул **бәйләнешле** дип атала. Тетраэдр (70, *а* рәс. кара), параллелепипед (70, *б* рәс. кара), октаэдр (71 нче рәс. кара), яссылык бәйләнешле фигурага мисал булып тора. Ике параллель яссылыктан торган фигура бәйләнешле фигура түгел.

Пространствода үзенең барлык чик нокталарын эченә алган (өстәвенә фигураның эчке нокталарының теләсә кайсы чик ноктадан теләгән кадәр якын урнашкан) бәйләнешле чикләнгән фигураны **геометрик җисем** дип (яки **җисем** дип кенә) атыйлар. Җисемнең

чиген шулай ук **өслек** дип атыйлар һәм өслек җисемне **чикли**, диләр.

Ике ягында да бирелгән җисемнең нокталары булган яссылык **кисүче яссылык** дип атала. Җисем яссылык белән кисешкәндә барлыкка килгән фигура (ягъни җисем белән кисүче яссылыкның уртак кисәге) җисемнең **киселе** дип атала.

29* Эйлер теоремасы

Хәзер без чыгышы белән швейцарияле булган һәм гомеренең күбрәк өлешен Россиядә эшләгән атаклы математик Леонард Эйлер (1707—1783) исеме белән бәйле гаҗәеп бер теореманы исбатларбыз.

Теорема

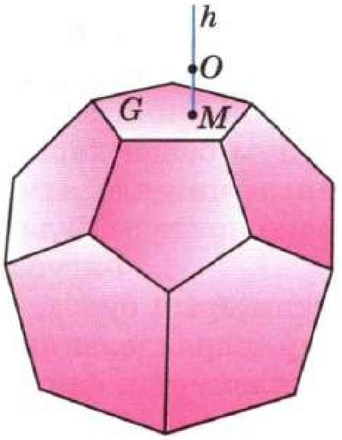
Теләсә нинди кабарынкы күпкырлыкта кырлар санының суммасы һәм түбәләр санының суммасы кабыргалар санынннан 2 гә күбрәк.

Исбатлау

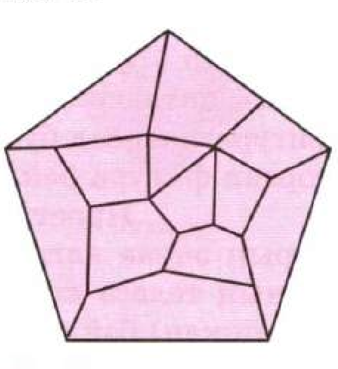
Ирекле рәвештә алынган һәм e түбәсе, f кыры, k кабыргасы булган кабарынкы күпкырлыкны тикшерербез.

$f + e - k = 2$ икәнен исбатлыйк.

Ирекле рәвештә G кырын сайлап алып, аның эчке өлкәсендә нинди дә булса M ноктасы билгелибез, аннан бу кыр яссылыгына перпендикуляр һәм күпкырлыкның нокталары булмаган якта яткан h нуры үткәрәбез. Әгәр кайсы да булса башка кырларының яссылыклары h нурын киссәләр, ул вакытта анда M ноктасы һәм M га якын кисешү ноктасы арасында O ноктасы сайлап алабыз; киресенчә булганда O ноктасы сыйфатында h нурының ирекле ноктасын алабыз (рәс. 74). Ул вакытта O ноктасы күпкырлыкның һәр кыры яссылыгының икенче ягында яткан, күпкырлыкның үзе кебек үк, G дан үзгә нокта булыр.



Рәс. 74


Рәс. 75

Хәзер G кырын алып ташлыйк. Нәтиҗәдә, бирелгән күпкырлык кебек, шул ук кабыргаларга һәм түбәләргә ия булган һәм кырлары саны $f - 1$ гә тигез булган күпкырлы F өслеген табарбыз. Башлангычы O булган теләсә нинди нур F өслеген бердән күп булмаган ноктада кисеп үтә (чөнки F өслеге белән кисешкәннән соң, нур F өслегенең нокталары булмаган ярымпространствога «китә»). O ноктасын проекцияләү

үзәге итеп алып, F өслегенең G кыры яссылыгына үзәкле проекциясен тикшерик (рәс. 75; G кыры бу рәсемдә зурайтылган масштабта сурәтләнгән). Ул $f-1$ кабарынкы күппочмаклардан — калган кырларның проекцияләреннән төзелгән G кырын чагылдырыр (бу күппочмакларның кабарынкы икәнен исбатлагыз). Бу күппочмакларның түбәләр саны e, ә яклар саны k. Әгәр аларның кайсысының да булса берсенең диагональен үткәрсәк, түбәләр саны үзгәрмәс, күппочмаклар саны 1 гә артыр, яклар саны да 1 гә артыр, шуңа күрә күппочмаклар саны белән яклар санының аермасы үзгәрмәс (75 нче рәс. кара). Димәк, һәр күппочмакны диагональләр белән өчпочмакларга бүлсәк, G кыры түбәләре e' һәм яклары k' булган f' өчпочмакка бүленгән булыр, өстәвенә

$$f'+e'-k'=(f-1)+e-k.$$

n — G кырының яклар саны булсын. Һәр өчпочмакның өч ягы бар, шуңа күрә k' саны һәркайсы бер үк вакытта ике өчпочмакның ягы булган яклар саны кадәр $3f'$ саныннан кимрәк, ягъни $k'-n$:

$$k'=3f'-(k'-n).$$

Моннан табабыз: $n=2k'-3f'$.

Барлык өчпочмакларның почмаклары суммасы бер яктан $f'\cdot 180°$, икенчедән G n-почмагының почмаклары суммасы плюс $360°$ ны G ның эчендә яткан түбәләр саны $e'-n$ га тапкырлаганга тигез:

$$f'\cdot 180°=(n-2)\cdot 180°+360°\cdot(e'-n).$$

Моннан табабыз:

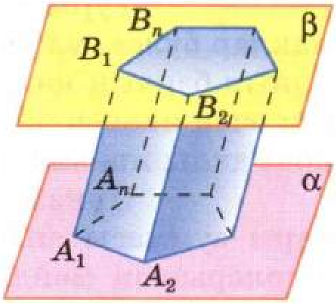
$$f'=2e'-n-2=2e'-(2k'-3f')-2,$$

ягъни $f'+e'-k'=1$. Ләкин $f'+e'-k'=(f-1)+e-k$. Димәк, $f+e-k=2$. Теорема исбатланды.

30 Призма

α һәм β параллель яссылыкларындагы тиңдәшле түбәләрен тоташтыручы A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n кисемтәләре параллель булырлык итеп урнашкан $A_1A_2 \dots A_n$ һәм $B_1B_2 \dots B_n$ тигез күппочмакларын тикшерик (рәс. 76).

$$A_1A_2B_2B_1,\ A_2A_3B_3B_2,\ \dots,\ A_nA_1B_1B_n \qquad (1)$$



Призма. $A_1A_2 \dots A_n$ һәм $B_1B_2 \dots B_n$ күппочмаклары — призманың нигезләре. $A_1A_2B_2B_1$, ..., $A_nA_1B_1B_n$ параллелограммнары — ян кырлары

Рәс. 76

n дүртпочмакның һәркайсы параллелограмм, чөнки пар-пар капма-каршы параллель яклары бар. Мәсәлән, $A_1A_2B_2B_1$ дүртпочмагында A_1B_1 һәм A_2B_2 яклары шарт буенча параллель, ә A_1A_2 һәм B_1B_2 яклары параллель яссылыкларны өченче яссылык белән кистергәндәге үзлек буенча параллель (п. 11).

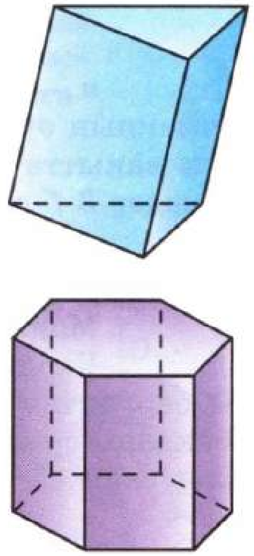
Параллель яссылыкларда урнашкан тигез $A_1A_2 \dots A_n$ һәм $B_1B_2 \dots B_n$ күппочмакларыннан һәм n параллелограммнан (1) төзелгән күпкырлык **призма** дип атала (76 нчы рәс. кара).

$A_1A_2 \dots A_n$ һәм $B_1B_2 \dots B_n$ күппочмаклары призманың **нигезләре** дип, ә (1) параллелограммнары **ян кырлары** дип атала. A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n кисемтәләре призманың **ян кабыргалары** дип атала. Бу кабыргалар эзлекле рәвештә бер-берсенә янәшә урнашкан (1) параллелограммнарының капма-каршы яклары буларак тигез һәм параллель. $A_1A_2 \dots A_n$ һәм $B_1B_2 \dots B_n$ нигезе призманы $A_1A_2 \dots A_nB_1B_2 \dots B_n$ дип тамгалыйлар һәм **n-почмаклы призма** дип атыйлар. 77 нче рәсемдә — өчпочмаклы һәм алтыпочмаклы призмалар, ә 70, *б* рәсемендә дүртпочмаклы призма, ягъни параллелепипед сурәтләнгән.

Бер нигезенең нинди дә булса ноктасыннан икенче нигез яссылыгына үткәрелгән перпендикуляр призманың **биеклеге** дип атала.

Әгәр призманың ян кабыргалары нигезләренә перпендикуляр булса, ул **туры призма** дип, ә перпендикуляр булмаганда **авыш призма** дип атала. Туры призманың биеклеге аның ян кабыргасына тигез.

Туры призманың нигезләре төзек күппочмаклар булса, ул **төзек призма** дип атала. Андый призманың барлык ян кырлары — тигез турыпочмаклыклар (ни өчен икәнен аңлатыгыз). 77 нче рәсемдә төзек алтыпочмаклы призма сурәтләнгән.



Рәс. 77

Призманың барлык кырларының мәйданнары суммасы аның **тулы өслеге мәйданы** дип, ә ян кырларының мәйданнары суммасы **призманың ян өслеге мәйданы** дип атала. Призманың тулы өслеге мәйданы S_m аның ян өслеге мәйданы $S_{ян}$ һәм нигез мәйданы $S_н$ аша түбәндәге формула белән аңлатыла:

$$S_m = S_{ян} + 2S_н.$$

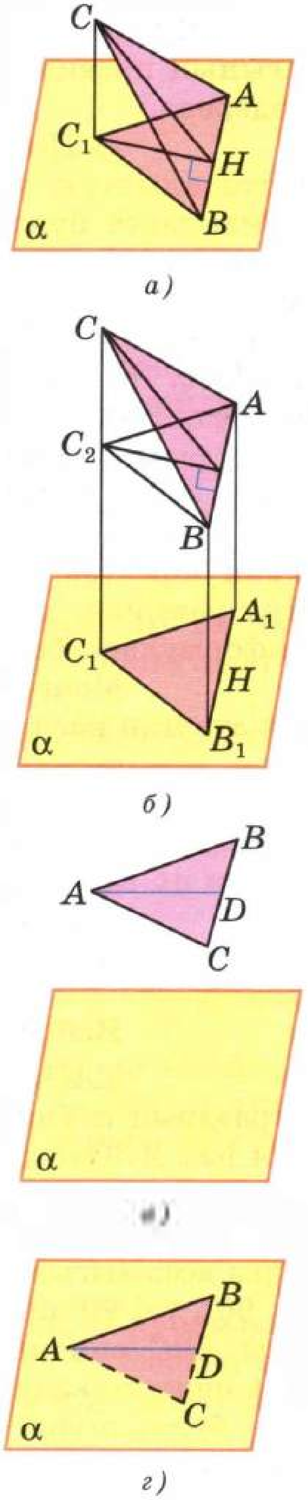
Туры призманың ян өслеге мәйданы турындагы теореманы исбатлыйк.

Теорема

Туры призманың ян өслеге мәйданы аның нигез периметры белән биеклегенең тапкырчыгышына тигез.

Исбатлау

Туры призманың ян кырлары — турыпочмаклыклар, аларның нигезләре — призма нигезенең яклары, ә биеклекләре призманың биеклеге h ка тигез. Призманың ян өслеге мәйданы шушы турыпочмаклыкларның мәйданнары суммасына тигез, ягъни нигез яклары белән h биеклегенә тапкырчыгышларының суммасына тигез. h тапкырлаучысын җәя тышына чыгарып, җәя эчендә призма нигезенең яклары суммасын, ягъни аның периметры P ны табабыз. Шулай итеп, $S_{ян} = Ph$. Теорема исбатланды.



Рәс. 78

31* Пространствода Пифагор теоремасы

Башта түбәндәге мәсьәләне чишәрбез.

Мәсьәлә

Куппочмак яссылыгы белән α яссылыгы арасындагы почмак φ гә тигез ($0° < \varphi < 90°$) булганда, S_1 мәйданлы куппочмакның α яссылыгына булган турыпочмаклы проекциясенең мәйданы S_1 не табарга.

Чишү

а) Бирелгән куппочмак бер ягы α яссылыгында яткан өчпочмак булган очрактан башларбыз: игътибарны 78 нче *а* рәсеменә юнәлтик. Монда ABC өчпочмагының AB ягы α яссылыгында ята, CC_1 кисемтәсе — C ноктасыннан α яссылыгына үткәрелгән перпендикуляр, димәк, ABC_1 өчпочмагы — ABC өчпочмагының α яссылыгына проекциясе. C_1H кисемтәсе ABC өчпочмагының биеклеге булсын. Ул вакытта CH кисемтәсе — ABC өчпочмагының биеклеге (өч перпендикуляр турындагы теорема буенча), ә $\angle CHC_1 = \varphi$ (ни өчен икәнен аңлатып бирегез).

$$S_1 = \frac{1}{2} AB \cdot C_1H,\ S = \frac{1}{2} AB \cdot CH,\ C_1H = CH \cdot \cos\varphi$$

булганлыктан,

$$S_1 = S \cdot \cos\varphi. \quad (2)$$

б) Әгәр бирелгән ABC өчпочмагының AB ягы α яссылыгына параллель булса (рәс. 78, *б*; бу рәсемдә

$A_1B_1C_1$ өчпочмагы — ABC өчпочмагының проекциясе, ABC_2 яссылыгы α яссылыгына параллель), ул вакытта исбатлау буенча, ABC_2 өчпочмагының мәйданы $S \cdot \cos\varphi$ гә тигез. Ләкин ABC_2 өчпочмагы $A_1B_1C_1$ өчпочмагына тигез (моны исбатлагыз), шуңа күрә аның мәйданы S_1 гә тигез. Шулай итеп, бу очракта S мәйданлы ABC өчпочмагының проекциясе мәйданы S_1 (2) формуласы белән белдерелә.

в) Ниһаять, мәйданы S булган ирекле рәвештә алынган күппочмакны тикшерербез. Аны өчпочмакларга бүләбез. Әгәр дә аның бер ягы да α яссылыгына параллель булмаса һәм анда ятмаса, ул вакытта өчпочмакның бер түбәсе аша α яссылыгына параллель (рәс. 78, *в*) яки α яссылыгының үзендә яткан (рәс. 78, *г*) кисемтә үткәреп, аны ике өчпочмакка бүләбез. Һәр өчпочмакның проекциясе мәйданын (2) формуласы аша күрсәтеп, әлеге мәйданнарны кушабыз. Уртак $\cos\varphi$ тапкырлаучысын җәя тышына чыгарып, җәя эчендә өчпочмакларның мәйданнары суммасын, ягъни бирелгән күппочмакның мәйданы S ны табарбыз. Шул рәвешле, күппочмакның проекциясе мәйданы S_1 (2) формуласы белән күрсәтелә.

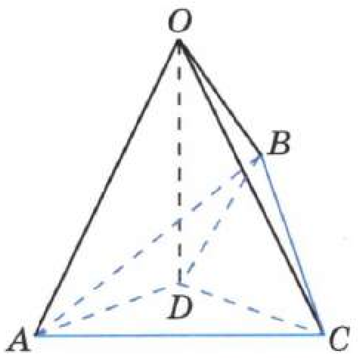
Моны **пространствода Пифагор теоремасы** дип аталган раслауны исбатлау өчен файдаланыйк.

Теорема

Әгәр тетраэдрның бер түбәсе янындагы барлык яссы почмаклары туры почмак булса, бу түбәгә каршы яткан кыры мәйданының квадраты калган кырлары мәйданнарының квадратлары суммасына тигез.

Исбатлау

$\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 90^\circ$ булган $OABC$ тетраэдрын тикшерербез. S_C, S_A, S_B һәм S — OAB, OBC, OCA һәм ABC өчпочмакларының мәйданнары; α, β, γ — кабыргалары AB, BC, CA булган икекырлы почмакларның зурлыклары; D ноктасы — O ноктасының ABC кыры яссылыгына проекциясе булсын (рәс. 79). $\alpha < 90^\circ$, $\beta < 90^\circ$, $\gamma < 90^\circ$ булганлыктан (моны исбатлагыз), D ноктасы ABC өчпочмагының эчендә ята. OAB, OBC һәм OCA өчпочмаклары исә ABC өчпочмагының проекцияләре була, шуңа күрә $S_C = S\cos\alpha$, $S_A = S\cos\beta$, $S_B = S\cos\gamma$.



Рәс. 79

ABD, BCD һәм CAD өчпочмаклары — OAB, OBC һәм OCA өчпочмакларының ABC кыры яссылы-

гына проекцияләре, өстәвенә бу өчпочмакларның мәйданнары суммасы ABC өчпочмагының мәйданы S ка тигез. Шулай итеп,

$$(S\cos\alpha)\cdot\cos\alpha+(S\cos\beta)\cdot\cos\beta+(S\cos\gamma)\cdot\cos\gamma=$$
$$=S(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)=S.$$

Димәк, $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$. Шуңа күрә

$$S_C{}^2+S_A{}^2+S_B{}^2=S^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)=S^2.$$

Теорема исбатланды.

Мәсьәләләр

218 а) Туры призманың барлык ян кырлары — турыпочмаклыклар; б) төзек призманың барлык ян кырлары тигез турыпочмаклыклар икәнен исбатлагыз.

219 Турыпочмаклы параллелепипедның нигез яклары 12 см һәм 5 см га тигез. Параллелепипедның диагонале нигез яссылыгы белән 45°лы почмак төзи. Параллелепипедның ян кабыргасын табыгыз.

220 Туры параллелепипедның нигезе — диагональләре 10 см һәм 24 см булган ромб, ә параллелепипедның биеклеге 10 см га тигез. Параллелепипедның зур диагонален табыгыз.

221 Өчпочмаклы төзек призманың нигез ягы 8 см га, ян кабыргасы 6 см га тигез. Өске нигез ягы һәм аскы нигезнең каршы яткан түбәсе аша үтүче кисем мәйданын табыгыз.

222 Туры призманың нигезе — нигезләре 25 см һәм 9 см, биеклеге 8 см га тигез булган тигезьянлы трапеция. Призманың ян кабыргалары янындагы икекырлы почмакларын табыгыз.

223 Кубның капма-каршы яткан ике кабыргасы аша мәйданы $64\sqrt{2}$ см^2 га тигез булган кисем үткәрелгән. Кубның кабыргасын һәм диагонален табыгыз.

224 Дүртпочмаклы төзек призманың диагонале нигез яссылыгына 60°лы почмак ясап авышкан. Нигез диагонале $4\sqrt{2}$ см га тигез булса, аскы нигез ягы һәм өске нигезенең капма-каршы ягы аша үтүче кисем мәйданын табыгыз.

225 Дүртпочмаклы төзек призманың диагонале ян кыр яссылыгы белән 30°лы почмак төзи. Диагональ белән нигез яссылыгы арасындагы почмакны табыгыз.

226 Дүртпочмаклы төзек призманың нигез диагонале аша призманың диагоналенә параллель кисем үткәрелгән. Призма нигезенең ягы 2 см га, ә призманың биеклеге 4 см га тигез булса, кисем мәйданын табыгыз.

227 Призманың нигезе — төзек ABC өчпочмагы. AA_1 ян кабыргасы нигезенең AC һәм AB яклары белән тигез почмаклар төзи. а) $BC\perp AA_1$; б) CC_1B_1B турыпочмаклык икәнен исбатлагыз.

228 Тигезьянлы ABC өчпочмагы — $ABCA_1B_1C_1$ авыш призмасының нигезе, анда $AC = AB = 13$ см, $BC = 10$ см, ә призманың ян кабыргасы нигез яссылыгы белән 45°лы почмак төзи. ABC өчпочмагы медианаларының кисешү ноктасы A_1 түбәсенең проекциясе була. CC_1B_1B кырының мәйданын табыгыз.

229 n-почмаклы төзек призманың нигезенең ягы a га, биеклеге h ка тигез. а) $n = 3$, $a = 10$ см, $h = 15$ см; б) $n = 4$, $a = 12$ дм, $h = 8$ дм; в) $n = 6$, $a = 23$ см, $h = 5$ дм; г) $n = 5$, $a = 0{,}4$ м, $h = 10$ см булса, призманың ян өслеге һәм тулы өслеге мәйданын табыгыз.

230 Туры призманың нигезе — яклары 5 см һәм 3 см га, алар арасындагы почмагы 120°ка тигез булган өчпочмак. Ян кырларыннан зуррагының мәйданы 35 см^2. Призманың ян өслеге мәйданын табыгыз.

231 Туры параллелепипедның нигез яклары 8 см һәм 15 см га тигез һәм 60°лы почмак төзиләр. Диагональ кисемнәренең* кечерәгенең мәйданы 130 см^2 га тигез. Параллелепипедның өслек мәйданын табыгыз.

232 Турыпочмаклы параллелепипедның d га тигез диагонале нигез яссылыгы белән φ почмагы, ә бер ян кыры белән α почмагы төзи. Параллелепипедның ян өслеге мәйданын табыгыз.

233 Туры $ABCA_1B_1C_1$ призмасының нигезендә туры почмагы B булган турыпочмаклы ABC өчпочмагы ята. BB_1 кабыргасы аша, AA_1C_1C кыры яссылыгына перпендикуляр итеп, BB_1D_1D кисеме үткәрелгән. $AA_1 = 10$ см, $AD = 27$ см, $DC = 12$ см булса, кисем мәйданын табыгыз.

234 Турыпочмаклы өчпочмак туры призманың нигезе булып хезмәт итә. Гипотенузаның уртасы аша аңа перпендикуляр яссылык үткәрелгән. Катетлары 20 см һәм 21 см, ә ян кабыргасы 42 см га тигез булса, кисем мәйданын табыгыз.

235 Кысынкы почмагы φ булган турыпочмаклы өчпочмак туры призманың нигезе булып хезмәт итә. Бу почмакка каршы яткан катеты һәм призманың бу катетка каршы яткан түбәсе аша нигез яссылыгы белән θ почмагы төзүче кисем үткәрелгән. Призманың ян өслеге мәйданы белән кисем мәйданының чагыштырмасын табыгыз.

236 Авыш призманың ян өслеге мәйданы перпендикуляр кисем** периметры белән ян кабыргасының тапкырчыгышына тигез икәнен исбатлагыз.

237 Дүртпочмаклы авыш призманың ян кабыргасы 12 см га тигез, ә перпендикуляр кисеме — ягы 5 см га тигез булган ромб. Призманың ян өслеге мәйданын табыгыз.

---

* Параллелепипедның кисеме аның кайсы да булса диагонален һәм ян кабыргасын эченә алса, ул диагональ кисеме дип атала.

** Авыш призманың ян кабыргаларга перпендикуляр һәм аларны кисеп үтүче яссылык белән кисеме перпендикуляр кисем дип атала.

238 Өчпочмаклы авыш призманың ике ян кыры үзара перпендикуляр, ә аларның ике ян кабыргадан 12 см һәм 35 см ераклыкта урнашкан уртак кабыргасы 24 см га тигез. Призманың ян өслеге мәйданын табыгыз.

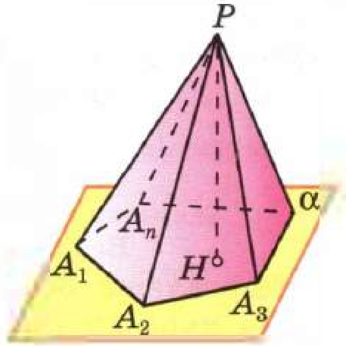
§ 2 Пирамида

32 Пирамида

$A_1A_2 \dots A_n$ күппочмагын һәм бу күппочмак яссылыгында ятмаган P ноктасын тикшерик. P ноктасын кисемтәләр ярдәмендә күппочмак түбәләре белән тоташтырып, n өчпочмак табабыз (рәс. 80):

$$PA_1A_2,\ PA_2A_3,\ \dots,\ PA_nA_1. \qquad (1)$$

$A_1A_2 \dots A_n$ n-почмактан һәм n өчпочмактан (1) төзелгән күпкырлык **пирамида** дип атала. $A_1A_2 \dots A_n$ күппочмагы — пирамиданың **нигезе**, ә (1) өчпочмаклары **ян кырлары** дип атала. P ноктасы — пирамиданың түбәсе, ә PA_1, PA_2, ..., PA_n кисемтәләре аның **ян кабыргалары** дип атала. Нигезе $A_1A_2 \dots A_n$ һәм түбәсе P булган пирамиданы болай тамгалыйлар: $PA_1A_2 \dots A_n$ һәм n-почмаклы пирамида дип атыйлар. 81 нче рәсемдә дүртпочмаклы һәм алтыпочмаклы пирамидалар сурәтләнгән. Өчпочмаклы пирамиданың тетраэдр дип аталуы безгә мәгълүм.



Пирамида. $A_1A_2A_3 \dots A_n$ күппочмагы — пирамиданың нигезе. A_1PA_2, A_2PA_3, ..., A_nPA_1 — ян кырлары, P — пирамиданың түбәсе

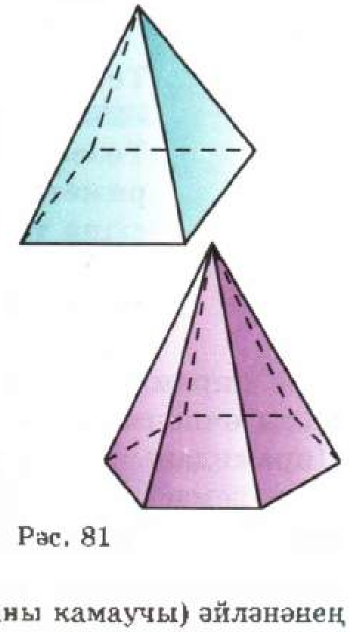
Рәс. 80

Пирамиданың түбәсеннән нигез яссылыгына үткәрелгән перпендикуляр аның **биеклеге** дип атала. 80 нче рәсемдә PH кисемтәсе — пирамиданың биеклеге.

Пирамиданың барлык кырларының (ягъни нигезенең һәм ян кырларының) мәйданнары суммасы аның **тулы өслеге мәйданы** дип, ә ян кырларының мәйданнары суммасы **пирамиданың ян өслеге мәйданы** дип атала.

$$S_{тл} = S_{ян} + S_{н}$$

икәнлеге ачык.



Рәс. 81

33 Төзек пирамида

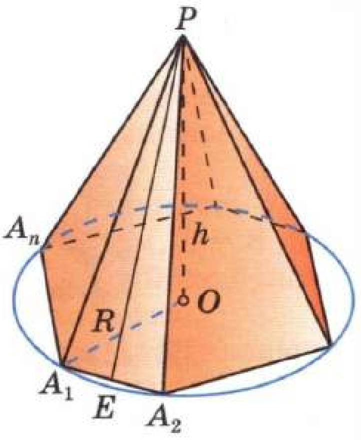
Пирамиданың нигезендә төзек күппочмак ятса, ә пирамиданың түбәсен нигезнең үзәге* белән тоташтыручы кисемтә аның биеклеге булса, ул **төзек пирамида** дип атала (рәс. 82).

* Төзек күппочмакның үзәге дип аңа камалган (яки аны камаучы) әйләнәнең үзәге аталуын исегезгә төшерәбез.

Төзек пирамиданың **барлык ян кабыргалары тигез, ә ян кырлары тигез тигезьянлы өчпочмаклар** булганын исбатларбыз.

$PA_1A_2 \ldots A_n$ төзек пирамидасын тикшерик (рәс. 82). Башта бу пирамиданың барлык ян кабыргалары тигез икәнен исбатлыйбыз. Пирамиданың теләсә кайсы ян кабыргасы турыпочмаклы өчпочмакның гипотенузасы булып тора. Бу өчпочмакның бер катеты — пирамиданың PO биеклеге, икенчесе — нигезне камаучы әйләнәнең радиусы (мәсәлән, $OP = h$, $OA_1 = R$ булган OPA_1 өчпочмагының гипотенузасы — PA_1 ян кабыргасы). Пифагор теоремасы буенча, теләсә кайсы ян кабырга $\sqrt{h^2 + R^2}$ га тигез, шуңа күрә

$$PA_1 = PA_2 = \ldots = PA_n.$$



Рәс. 82

Без төзек $PA_1A_2 \ldots A_n$ пирамидасының ян кабыргалары бер-берсенә тигез икәнен исбатладык, шуңа күрә ян кырлар — тигезьянлы өчпочмаклар. Бу өчпочмакларның нигезләре шулай ук бер-берсенә тигез, чөнки $A_1A_2 \ldots A_n$ — төзек күппочмак. Шулай булгач, ян кырлар өчпочмаклар тигезлегенең өченче билгесе буенча тигез, шуны исбатларга кирәк иде дә.

Төзек пирамидада ян кырының түбәдән үткәрелгән биеклеге пирамиданың **апофемасы** дип атала. 82 нче рәсемдәге PE кисемтәсе — апофемаларның берсе. Төзек пирамидада барлык апофемаларның тигез икәнлеге ачык.

Төзек пирамиданың ян өслеге мәйданы турындагы теореманы исбатлыйк.

Теорема

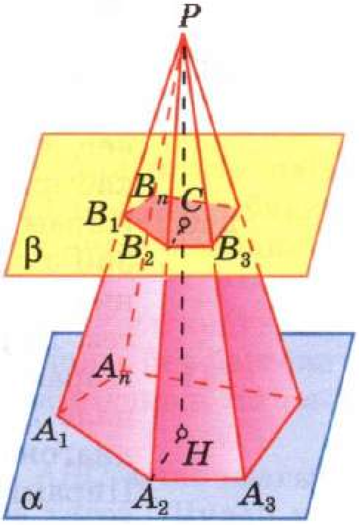
Төзек пирамиданың ян өслеге мәйданы нигезенең периметры белән апофемасы тапкырчыгышының яртысына тигез.

Исбатлау

Төзек пирамиданың ян кырлары — нигезләре пирамида нигезенең яклары булган тигез тигезьянлы өчпочмаклар, ә биеклекләре апофемаларга тигез. Пирамиданың ян өслеге мәйданы S нигезе яклары белән d апофемасының яртысы тапкырчыгышлары суммасына тигез. $\frac{1}{2}d$ тапкырлаучысын җәя тышына чыгарып, җәя эчендә пирамида нигезе якларының суммасын, ягъни аның периметрын табабыз. Теорема исбатланды.

34 Кисек пирамида

Теләсә нинди $PA_1A_2 \dots A_n$ пирамидасы алып, пирамиданың нигез яссылыгы α га параллель һәм ян кабыргаларын B_1, B_2, ..., B_n нокталарында кисүче β яссылыгы үткәрәбез (рәс. 83). β яссылыгы пирамиданы ике күпкырлыкка бүлә. Кырлары параллель яссылыкларда урнашкан $A_1A_2 \dots A_n$ һәм $B_1B_2 \dots B_n$ n-почмаклары **(аскы һәм өске нигезләр)** һәм n дүртпочмак $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, ... , $A_nA_1B_1B_n$ **(ян кырлар)** булган күпкырлык **кисек пирамида** дип атала.



Кисек пирамида

Рәс. 83

A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n кисемтәләре кисек пирамиданың **ян кабыргалары** дип атала.

$A_1A_2 \dots A_n$ һәм $B_1B_2 \dots B_n$ нигезләре булган кисек пирамида болай тамгалана: $A_1A_2 \dots A_nB_1B_2 \dots B_n$.

Бер нигезнең нинди дә булса ноктасыннан икенче нигез яссылыгына үткәрелгән перпендикуляр кисек пирамиданың **биеклеге** дип атала. 83 нче рәсемдә CH кисемтәсе — кисек пирамиданың биеклеге.

Кисек пирамиданың ян кырлары трапецияләр булуын исбатлыйк. Мәсәлән, $A_1A_2B_2B_1$ ян кырын тикшерик (рәс. 83). A_1A_2 һәм B_1B_2 яклары параллель, чөнки алар PA_1A_2 яссылыгының α һәм β параллель яссылыклары белән кисешү турыларында яталар. Бу кырның калган ике ягы A_1B_1 һәм A_2B_2 параллель түгел — аларның дәвамнары P ноктасында кисешәләр. Шуңа күрә бирелгән кыр — трапеция. Калган ян кырларның да трапецияләр булуын шулай ук исбатларга мөмкин.

Кисек пирамида төзек пирамидадан аның нигезенә параллель яссылык белән кистереп алынса, ул **төзек кисек пирамида** дип атала. Төзек кисек пирамиданың нигезләре — төзек күппочмаклар, ә ян кырлары — тигезьянлы трапецияләр (моны исбат итегез). Бу трапецияләрнең биеклекләре **апофемалар** дип атала. Кисек пирамиданың ян кырларының мәйданнары суммасы **кисек пирамиданың ян өслеге мәйданы** дип атала.

▼ Түбәндәге теореманы мөстәкыйль рәвештә исбатлагыз. △

Теорема

Төзек кисек пирамиданың ян өслеге мәйданы нигез периметрлары ярымсуммасын апофемага тапкырлаганга тигез.

Мәсьәләләр

239 Пирамиданың нигезе — ягы 5 см булган ромб, ә диагональләренең берсе 8 см га тигез. Пирамиданың биеклеге нигез диагональләренең кисешү ноктасы аша үтсә һәм 7 см га тигез булса, аның ян кабыргаларын табыгыз.

240 Пирамиданың нигезе — яклары 20 см һәм 36 см га, ә мәйданы 360 см^2 га тигез булган параллелограмм. Пирамиданың биеклеге нигез диагональләренең кисешү ноктасы аша үтә һәм 12 см га тигез. Пирамиданың ян өслеге мәйданын табыгыз.

241 Пирамиданың нигезе — яклары 5 м һәм 4 м, ә кечерәк диагонале 3 м булган параллелограмм. Пирамиданың биеклеге нигез диагональләренең кисешү ноктасы аша үтә һәм 2 м га тигез. Пирамиданың тулы өслеге мәйданын табыгыз.

242 Пирамиданың нигезендә квадрат ята, аның бер ян кабыргасы нигез яссылыгына перпендикуляр. Пирамиданың биеклеге аша үтмәүче ян кыр яссылыгы нигез яссылыгына 45°лы почмак ясап авышкан. Иң зур ян кабыргасы 12 см га тигез. а) Пирамиданың биеклеген; б) пирамиданың ян өслеге мәйданын табыгыз.

243 $DABC$ пирамидасының нигезендә яклары $AB = AC = 13$ см, $BC = 10$ см булган ABC өчпочмагы ята, AD кабыргасы нигез яссылыгына перпендикуляр һәм 9 см га тигез. Пирамиданың ян өслеге мәйданын табыгыз.

244 $DABC$ пирамидасының нигезе — турыпочмаклы ABC өчпочмагы, аның AB гипотенузасы 29 см га, AC катеты 21 см га тигез. DA кабыргасы нигез яссылыгына перпендикуляр һәм 20 см га тигез. Пирамиданың ян өслеге мәйданын табыгыз.

245 Пирамиданың нигезе — диагонале 8 см га тигез булган турыпочмаклык. Ике ян кырының яссылыклары нигез яссылыгына перпендикуляр, ә калган ике ян кыры нигез белән 30° һәм 45°лы почмаклар төзи. Пирамида өслегенең мәйданын табыгыз.

246 Өчпочмаклы пирамиданың биеклеге 40 см га, ә һәр ян кырының пирамида түбәсеннән үткәрелгән биеклеге 41 см га тигез. а) Пирамиданың биеклеге аның нигезенә камалган әйләнәнең үзәге аша үткәнен исбатлагыз; б) пирамида нигезенең периметры 42 см га тигез булса, нигезнең мәйданын табыгыз.

247 Пирамиданың нигез янындагы икекырлы почмаклары тигез. а) Пирамиданың биеклеге нигезгә камалган әйләнәнең үзәге аша үткәнен; б) барлык ян кырларында пирамида түбәсеннән үткәрелгән биеклекләре тигез икәнен; в) пирамиданың ян өслеге мәйданы нигез периметры белән ян кырының түбәдән үткәрелгән биеклеге тапкырчыгышының яртысына тигез икәнен исбатлагыз.

248 Пирамиданың нигезе — яклары 12 см, 10 см һәм 10 см булган өчпочмак. Һәр ян кыры нигезгә 45° лы почмак ясап авышкан. Пирамиданың ян өслеге мәйданын табыгыз.

249 Пирамиданың барлык ян кабыргалары тигез. а) Пирамиданың биеклеге аның нигезен камаучы әйләнә үзәге аша үткәнен; б) пирамиданың барлык ян кабыргалары нигез яссылыгы белән тигез почмаклар төзегәнен исбатлагыз.

250 Пирамиданың нигезендә почмагы 120°ка тигез булган тигезьянлы өчпочмак ята. Ян кабыргалары аның 16 см га тигез булган биеклеге белән 45° лы почмаклар төзи. Пирамиданың нигез мәйданын табыгыз.

251 *DABC* пирамидасының нигезе — гипотенузасы *BC* булган турыпочмаклы өчпочмак. Пирамиданың ян кабыргалары бер-берсенә тигез, ә биеклеге 12 см. *BC* = 10 см булса, пирамиданың ян кабыргасын табыгыз.

252 *DABC* пирамидасының нигезе — тигезьянлы *ABC* өчпочмагы, анда *AB* = *AC*, *BC* = 6 см, *AH* биеклеге 9 см га тигез. Шулай ук *DA* = *DB* = *DC* = 13 см икәне билгеле. Пирамиданың биеклеген табыгыз.

253 Пирамиданың нигезе булып нигезләре 6 см һәм $4\sqrt{6}$ см, биеклеге 5 см булган тигезьянлы трапеция хезмәт итә. Пирамиданың һәр ян кабыргасы 13 см га тигез. Аның биеклеген табыгыз.

254 Өчпочмаклы төзек пирамидада нигезенең ягы a га, биеклеге H ка тигез. Пирамиданың: а) ян кабыргасын; б) түбәсе янындагы яссы почмагын; в) ян кабыргасы белән нигез яссылыгы арасындагы почмагын; г) ян кыры белән нигезе арасындагы почмагын; д) ян кабыргасы янындагы икекырлы почмагын табыгыз.

255 Өчпочмаклы төзек пирамидада нигезенең ягы 8 см га, ә түбә янындагы яссы почмагы φ гә тигез. Пирамиданың биеклеген табыгыз.

256 Дүртпочмаклы төзек пирамидада нигез ягы m га, ә түбә янындагы яссы почмагы α га тигез. Пирамиданың а) биеклеген; б) ян кабыргасын; в) ян кыры белән нигез яссылыгы арасындагы почмагын; г) ян кабыргасы янындагы икекырлы почмагын табыгыз.

257 Өчпочмаклы төзек пирамиданың биеклеге h ка, ә нигез ягы янындагы икекырлы почмагы 45°ка тигез. Пирамиданың өслек мәйданын табыгыз.

258 Дүртпочмаклы төзек пирамиданың ян кабыргасы нигез яссылыгы белән 60°лы почмак төзи. Ян кабыргасы 12 см га тигез булса, пирамиданың өслек мәйданын табыгыз.

259 Дүртпочмаклы төзек пирамиданың нигез ягы 6 см га, ә ян кырының нигез яссылыгына авышлык почмагы 60°ка тигез. Пирамиданың ян кабыргасын табыгыз.

260 Өчпочмаклы төзек *DABC* пирамидасында *DC* ян кабыргасы һәм пирамиданың *DO* биеклеге аша α яссылыгы үткәрелгән. а) *AB* кабыргасының α яссылыгына перпендикуляр икәнен; б) *C* түбәсеннән *ADB* кырының апофемасына үткәрелгән пер-

пендикулярның ADB яссылыгына да перпендикуляр булганын исбатлагыз.

261 Өчпочмаклы төзек пирамидада чалышма кабыргаларның үзара перпендикуляр икәнен исбатлагыз.

262 Төзек пирамиданың биеклеге һәм ян кырының биеклеге аша үтүче яссылык ян кыр яссылыгына перпендикуляр икәнен исбатлагыз.

263 Төзек $MABCD$ пирамидасында K, L һәм N нокталары тиңдәшле рәвештә BC, MC һәм AD кабыргаларында яталар, өстәвенә $KN \parallel BA$, $KL \parallel BM$. а) Пирамиданың KLN яссылыгы белән кисемен төзегез һәм кисемнең төрен билгеләгез; б) KLN яссылыгы AMB яссылыгына параллель икәнен исбатлагыз.

264 Алтыпочмаклы төзек пирамидада нигезенең ягы a га тигез, ә ян кыр мәйданы пирамиданың биеклеге һәм нигезенең зур диагонале аша үткәрелгән кисем мәйданына тигез булса, пирамиданың ян өслеге мәйданын табыгыз.

265 Өчпочмаклы төзек пирамидада ян кабыргасы нигез яссылыгына $60°$лы почмак ясап авышкан. Нигез ягы аша, нигез яссылыгына $30°$лы почмак ясап, яссылык үткәрелгән. Нигезнең ягы 12 см га тигез булса, кисем мәйданын табыгыз.

266 Пирамиданың биеклеге 2 дм га тигез, ә ян кабыргалары бер-берсенә тигез, нигезендә исә яклары 6 дм һәм 8 дм булган турыпочмаклык ята. Нигезенең диагонале аша ян кабыргага параллель үткәрелгән кисем мәйданын табыгыз.

267 Пирамида нигезенә параллель булган яссылык белән кистерелгән. Пирамиданың ян кабыргалары һәм биеклеге бу яссылык белән пропорциональ кисемтәләргә бүленгәнен исбатлагыз.

268 Дүртпочмаклы төзек пирамиданың нигез яссылыгына параллель яссылык пирамиданың биеклеген, пирамида түбәсеннән исәпләгәндә, $1 : 2$ чагыштырмасында бүлә. Килеп чыккан кисек пирамиданың апофемасы 4 дм га, ә аның тулы өслеге мәйданы 186 $дм^2$ га тигез. Кисек пирамиданың биеклеген табыгыз.

269 Өчпочмаклы төзек кисек пирамиданың нигез яклары 4 дм һәм 2 дм га, ә ян кабыргасы 2 дм га тигез. Пирамиданың биеклеген һәм апофемасын табыгыз.

270 Кисек пирамиданың нигезләре — яклары 5 см һәм 3 см га тигез булган төзек өчпочмаклар. Ян кабыргаларының берсе нигез яссылыгына перпендикуляр һәм 1 см га тигез. Кисек пирамиданың ян өслеге мәйданын табыгыз.

§ 3 Төзек күпкырлыклар

35 Пространствода симметрия

Планиметриядә без ноктага карата һәм турыга карата симметрик фигураларны тикшердек. Стереометриядә ноктага, турыга һәм яссылыкка карата симметрияне тикшерербез.

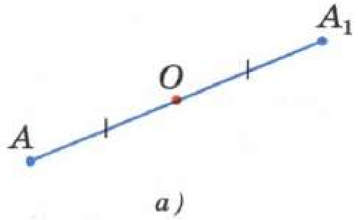
O ноктасы AA_1 кисемтәсенең уртасы булса, A һәм A_1 нокталары **O ноктасына (симметрия үзәгенә) карата симметрик** дип атала (рәс. 84, *а*). O ноктасы үз-үзенә симметрик дип исәпләнә.

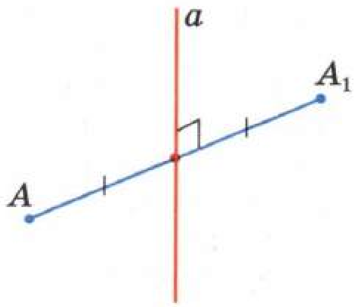
a турысы AA_1 кисемтәсенең уртасы аша үтсә һәм бу кисемтәгә перпендикуляр булса, A һәм A_1 нокталары **a турысына (симметрия күчәренә) карата симметрик** дип атала (рәс. 84, *б*). a турысының һәр ноктасы үз-үзенә симметрик дип исәпләнә.

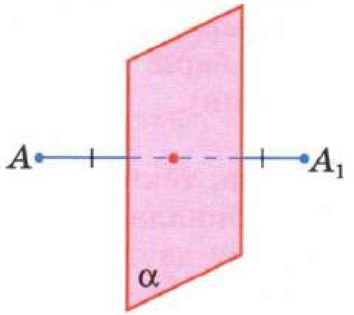
α яссылыгы AA_1 кисемтәсенең уртасы аша үтсә һәм бу кисемтәгә перпендикуляр булса, A һәм A_1 нокталары α **яссылыгына (симметрия яссылыгына) карата симметрик** дип атала (рәс. 84, *в*). α яссылыгының һәр ноктасы үз-үзенә симметрик дип исәпләнә.

Фигураның симметрия үзәге, күчәре һәм яссылыгы төшенчәсен бирик. **Әгәр фигураның һәр ноктасы ноктага (турыга, яссылыкка) карата шул ук фигураның ниндидер ноктасына симметрик булса, әлеге нокта (туры, яссылык) фигураның симметрия үзәге (күчәре, яссылыгы) дип атала.** Фигураның симметрия үзәге (күчәре, симметрия яссылыгы) булса, ул үзәк (күчәр симметриясенә, көзгедәгечә) симметриягә ия, диләр.

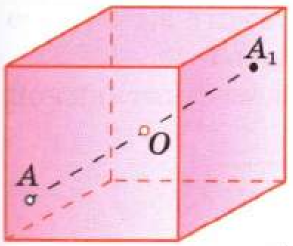
85, *а*, *б*, *в* рәсемнәрендә турыпочмаклы параллелепипедның симметрия үзәге O, a күчәре, α яссы-

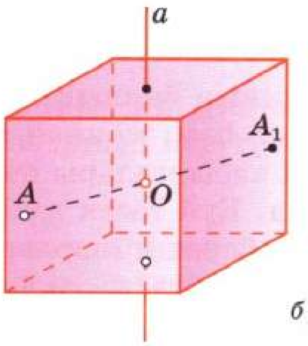




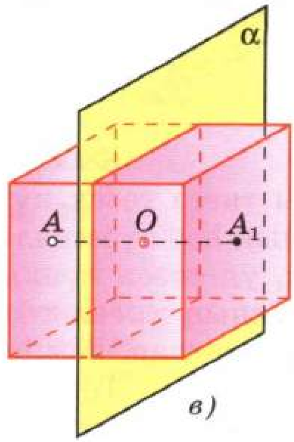


Рәс. 84





Рәс. 85

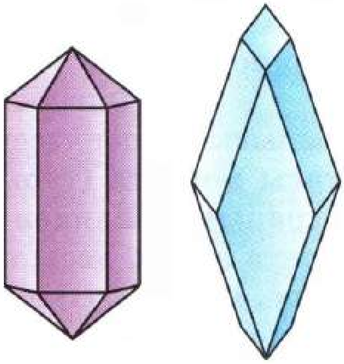


лыгы күрсәтелгән. Турыпочмаклы түгел, ләкин туры призма булган параллелепипедның симметрия яссылыгы (әгәр нигезе ромб булса — яссылыклары), күчәре һәм үзәге бар.

Фигураның бер яки берничә симметрия үзәге (симметрия күчәре, симметрия яссылыгы) булырга мөмкин. Мәсәлән, кубның бер генә симметрия үзәге, берничә симметрия күчәре һәм яссылыгы бар. Симметрия үзәкләре, күчәрләре яки яссылыклары чиксез күп булган фигуралар да бар. Туры һәм яссылык шундый фигураларның иң гадиләре. Яссылыкның теләсә кайсы ноктасы аның симметрия үзәге була. Бирелгән яссылыкка перпендикуляр теләсә нинди туры (яссылык) аның симметрия күчәре (яссылыгы) була. Икенче яктан, симметрия үзәкләре, күчәрләре һәм яссылыклары булмаган фигуралар да бар. Мәсәлән, туры призма булмаган параллелепипедның симметрия күчәрләре юк, ләкин симметрия үзәге бар һәм симметрия яссылыгы булуы мөмкин (кайсы очракта булуы мөмкин икәнен уйлагыз); гомумән алганда, призма һәм пирамиданың симметрия яссылыгы да, күчәре дә, үзәге дә юк (бу күпкырлыкларның симметрия яссылыгы, күчәре яки үзәге бары тик кайбер аерым очракларда гына булуы мөмкин).

Рәс. 86

Без симметрия белән табигатьтә, архитектурада, техникада, көндәлек тормышта еш очрашабыз. Күп биналар яссылыкка карата симметрик, мәсәлән, Мәскәү дәүләт университетының төп бинасы (рәс. 86), кайбер детальләрнең симметрия күчәре бар. Табигатьтә очрый торган барлык кристалларның да диярлек симметрия үзәге, күчәре яки яссылыгы бар (рәс. 87). Геометриядә күпкырлыкның симметрия үзәге, күчәре һәм яссылыгы бу күпкырлыкның **симметрия элементлары** дип атала.



Рәс. 87

36 Төзек күпкырлык төшенчәсе

Кабарынкы күпкырлыкның барлык кырлары тигез төзек күппочмаклар булса һәм, моннан тыш, аның һәр түбәсендә бер үк сандагы кабыргалары очрашса, ул **төзек күпкырлык** дип атала. Куб төзек күпкырлыкның мисалы булып тора. Аның барлык кырлары — квадратлар, һәм һәр түбәсендә өч кабыргасы очраша.

Төзек күпкырлыкның барлык кабыргалары бер-берсенә тигез икәнлеге ачык аңлашыла. Уртак ка-

быргага ия ике кырын эченә алган барлык икекырлы почмаклар шулай ук тигез икәнен исбатларга мөмкин.

Кырлары төзек алтыпочмаклар, җидепочмаклар һәм гомумән n-почмаклар ($n \geqslant 6$) булган төзек күпкырлыкларның юклыгын исбатларбыз. Дөрестән дә, $n \geqslant 6$ булганда, төзек n-почмакның почмагы $120°$ тан кечерәк түгел (ни өчен икәнен аңлатыгыз). Икенче яктан, күпкырлыкның һәр түбәсендә кимендә өч яссы почмак булырга тиеш. Шуңа күрә кыры $n \geqslant 6$ булган төзек n-почмаклардан торган төзек күпкырлык бар дип уйласак, андый күпкырлыкның һәр түбәсе янындагы яссы почмаклары суммасы $120° \cdot 3 = 360°$тан да кечерәк булмас иде. Ләкин моның булуы мөмкин түгел, чөнки кабарынкы күпкырлыкның һәр түбәсе янындагы яссы почмакларының суммасы $360°$тан кечерәк (п. 27).

Шушы ук сәбәп буенча төзек күпкырлыкның һәр түбәсе я өч, дүрт яки биш тигезьяклы өчпочмакның, я өч квадратның, я өч төзек бишпочмакның түбәсе була ала. Башка мөмкинчелекләр юк.

Шушыңа ярашлы рәвештә түбәндәге төзек күпкырлыкларны табабыз.

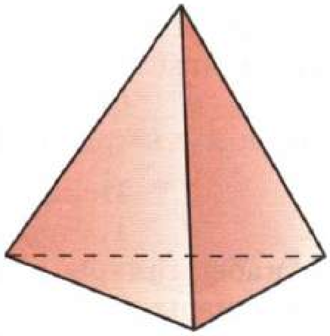
Төзек тетраэдр* (рәс. 88) дүрт тигезьяклы өчпочмактан төзелгән. Аның һәр түбәсе өч өчпочмакның түбәсе булып тора. Шулай булгач, һәр түбә янындагы яссы почмакларның суммасы $180°$ка тигез.

Төзек октаэдр (рәс. 89) сигез тигезьяклы өчпочмактан төзелгән. Октаэдрның һәр түбәсе дүрт өчпочмакның түбәсе булып тора. Димәк, һәр түбә янындагы яссы почмаклары суммасы $240°$ка тигез.

Төзек икосаэдр (рәс. 90) егерме тигезьяклы өчпочмактан төзелгән. Икосаэдрның һәр түбәсе биш өчпочмакның түбәсе булып тора. Димәк, һәр түбә янындагы яссы почмакларның суммасы $300°$ка тигез.

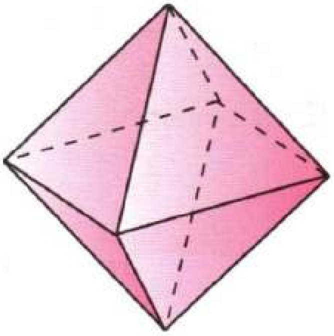
Куб (рәс. 91) алты квадраттан төзелгән. Кубның һәр түбәсе өч квадратның түбәсе була. Шулай булгач, һәр түбә янындагы яссы почмакларның суммасы $270°$ка тигез.

Төзек додекаэдр (рәс. 92) унике төзек бишпочмактан төзелгән. Додекаэдрның һәр түбәсе өч төзек



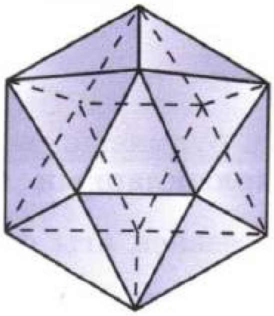
Төзек тетраэдр

Рәс. 88



Төзек октаэдр

Рәс. 89



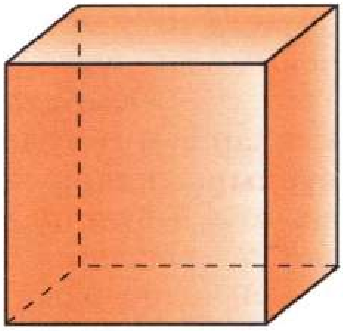
Төзек икосаэдр

Рәс. 90

* Без төзек тетраэдрны өчпочмаклы төзек пирамидадан аерабыз. Барлык кабыргалары да тигез булган төзек тетраэдрдан аермалы буларак, өчпочмаклы төзек пирамиданың ян кабыргалары бер-берсенә тигез, ләкин алар пирамиданың нигез кабыргаларына тигез булмавы мөмкин.

бишпочмакның түбәсе була. Шулай булгач, һәр түбә янындагы яссы почмакларның суммасы 324°ка тигез.

Санап кителгән биш төрдән тыш, башка төзек күпкырлыклар юк.



Куб

Рәс. 91

Искәрмәләр

1. Һәр төзек күпкырлыкның кырлары саны f, кабыргалары саны k һәм түбәләре саны e ны Эйлер теоремасы ярдәмендә табарга мөмкин. Дөрестән дә, n — һәр кабырганың кабыргалары саны, m — һәр түбәдә очрашучы кабыргалар саны, ди. Һәр кабырга ике кырныкы булганлыктан, $nf = 2k$. Моннан тыш, $me = 2k$ (һәр кабырга ике түбәгә ия) һәм Эйлер теоремасы буенча $f + e - k = 2$. Бу өч тигезлектән табабыз:

$$f = \frac{4m}{2m \cdot 2n \cdot mn},\ k = \frac{2mn}{2m \cdot 2n \cdot mn},\ e = \frac{4n}{2m \cdot 2n \cdot mn}.$$

Шул рәвешле,

төзек тетраэдрда ($n = 3$, $m = 3$):

$$f = 4,\ k = 6,\ e = 4;$$

төзек октаэдрда ($n = 3$, $m = 4$):

$$f = 8,\ k = 12,\ e = 6;$$

төзек икосаэдрда ($n = 3$, $m = 5$):

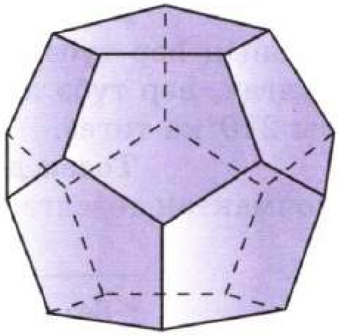
$$f = 20,\ k = 30,\ e = 12;$$

кубта ($n = 4$, $m = 3$) : $f = 6$, $k = 12$, $e = 8$;

төзек додекаэдрда ($n = 5$, $m = 3$):

$$f = 12,\ k = 30,\ e = 20.$$

2. Без төзек күпкырлыкларның биш төрдән күп булмавын исбатладык, ләкин күрсәтелгән бу күпкырлыкларның чынлыкта барлыгын исбатламадык. Нигезенең ягы a га, биеклеге $\frac{\sqrt{6}}{3}a$ га тигез булган төзек өчпочмаклы пирамиданың — төзек тетраэдрның, кубның барлыгы ачык. Куб кырының үзәкләре төзек октаэдрның түбәләре була (моны исбатлагыз), шуңа күрә төзек октаэдрның барлыгы шик тудырмый. Төзек икосаэдр ике төзек бишпочмаклы пирамидадан һәм күпкырлыктан төзелгән, ул бишпочмаклы призманы хәтерләтә. Бу күпкырлыктагы пирамидаларның биеклекләре a кабыргасы аша җиңел күрсәтелә (ничек?), шуңа күрә төзек икосаэдрның да барлыгы шик тудырмый. Ниһаять, төзек икосаэдр кырларының үзәкләре

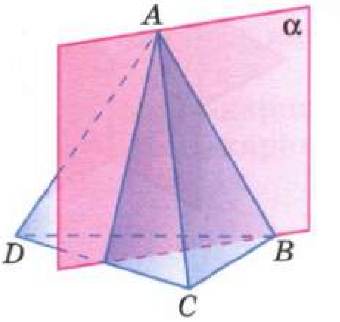


Төзек додекаэдр

Рәс. 92

төзек додекаэдрның түбәләре була (моның дөреслеген үзегез тикшерегез), шуңа күрә төзек додекаэдр да бар.

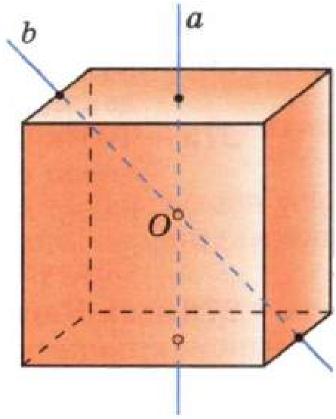
Искәртеп китәбез: барлык биш төзек күпкырлыкның да булуына, аларның җәелмәләрен ябыштырып, үз күзегез белән күреп инанырга мөмкин (271—275 нче биремнәр).



Рәс. 93

37 Төзек күпкырлыкларның симметрия элементлары

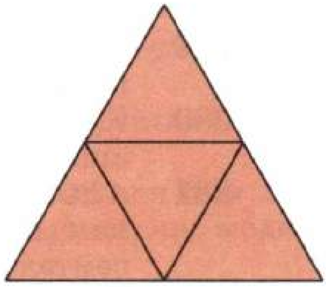
Төзек күпкырлыкларның симметрия элементларын карап китик. **Төзек тетраэдрның симметрия үзәге юк.** Капма-каршы ике кабыргасының уртасы аша үтүче туры аның симметрия күчәре була. Төзек $ABCD$ тетраэдрының AB кабыргасы аша капма-каршы CD кабыргасына перпендикуляр үтүче α яссылыгы симметрия яссылыгы була (рәс. 93). **Төзек тетраэдрның өч симметрия күчәре һәм алты симметрия яссылыгы бар.**



Рәс. 94

Кубның бер симметрия үзәге — диагональләренең кисешү ноктасы бар. Кубның тиңдәшле рәвештә капма-каршы кырларының үзәкләре һәм бер кырда ятмаган капма-каршы ике кабыргасының уртасы аша үтүче a һәм b турылары аның симметрия күчәрләре була (рәс. 94). **Кубның тугыз симметрия күчәре бар.** Симметрия күчәрләре барысы да симметрия үзәге аша үтә. Теләсә кайсы ике симметрия күчәре аша үтүче яссылык кубның симметрия яссылыгы була. **Кубның тугыз симметрия яссылыгы бар.**

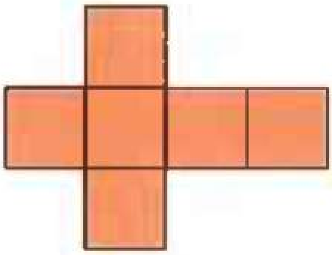
Төзек октаэдр, төзек икосаэдр һәм төзек додекаэдрның симметрия үзәге, берничә симметрия күчәре һәм яссылыгы бар. Аларны исәпләп чыгарырга тырышып карагыз.


Рәс. 95

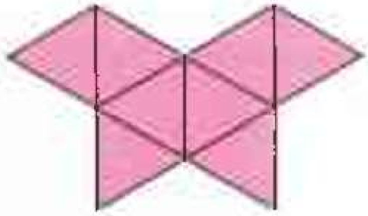
Практик биремнәр

271 Төзек тетраэдрның җәелмәсен калын кәгазь битенә зуррак масштабта күчереп сызыгыз (рәс. 95). Җәелмәне кисеп алыгыз һәм аннан тетраэдр ясап ябыштырыгыз.

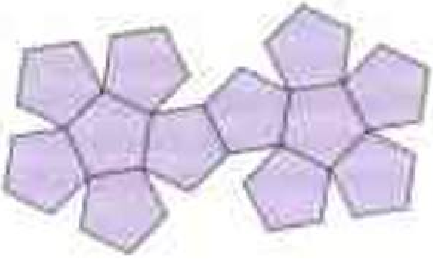
272 Кубның җәелмәсен калын кәгазьгә зуррак масштабта күчереп сызыгыз (рәс. 96). Җәелмәне кисеп алыгыз һәм аннан куб ясап ябыштырыгыз.


Рәс. 96

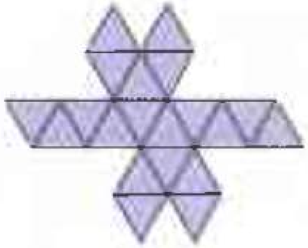
273 Төзек октаэдрның җәелмәсен калын кәгазьгә зуррак масштабта күчереп сызыгыз (рәс. 97). Җәелмәне кисеп алыгыз һәм аннан октаэдр ясап ябыштырыгыз.



Рәс. 97



Рәс. 98



Рәс. 99

274 Төзек додекаэдр җәелмәсен калын кәгазьгә зуррак масштабта күчереп сызыгыз (рәс. 98). Җәелмәне кисеп алыгыз һәм аннан додекаэдр ясап ябыштырыгыз.

275 Төзек икосаэдр җәелмәсен калын кәгазьгә зуррак масштабта күчереп сызыгыз (рәс. 99). Җәелмәне кисеп алыгыз һәм аннан икосаэдр ясап ябыштырыгыз.

Сораулар һәм мәсьәләләр

276 а) Параллелепипед; б) өчпочмаклы төзек призма; в) икекырлы почмак; г) кисемтәнең ничә симметрия үзәге бар?

277 а) Кисемтә; б) төзек өчпочмак; в) кубның ничә симметрия күчәре бар?

278 а) Куб булмаган дүртпочмаклы төзек призма; б)дүртпочмаклы төзек пирамида; в) өчпочмаклы төзек пирамиданың ничә симметрия яссылыгы бар?

279 Куб кырларының уртак очы булган ике диагонале арасындагы почмагын табыгыз.

280 Кубның кабыргасы a га тигез. Аның ике кырының диагональләре аша үтүче кисем мәйданын табыгыз.

281 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының D_1 түбәсеннән кырларының D_1A, D_1C һәм D_1B_1 диагональләре үткәрелгән һәм аларның очлары кисемтәләр белән тоташтырылган. D_1AB_1C күпкырлыгы төзек тетраэдр икәнен исбатлагыз. Куб һәм тетраэдр өслекләренең мәйданнары чагыштырмасын табыгыз.

282 Төзек октаэдрның уртак түбәгә ия булган, ләкин бер кырда ятмаган ике кабыргасы арасындагы почмакны табыгыз (89 нчы рәс. кара).

283 $DABC$ төзек тетраэдрының кабыргасы a га тигез. Тетраэдрда ABC кырының үзәге аша: а) BDC кырына параллель; б) AD кабыргасына перпендикуляр үтүче яссылык белән кисеменең мәйданын табыгыз.

284 Кабыргасы 2 гә тигез булган төзек тетраэдрның һәр түбәсеннән кабыргасы 1 гә тигез булган төзек тетраэдр кисеп алалар. Нәтиҗәдә нинди фигура килеп чыгар?

285 Төзек тетраэдрда кырларының үзәкләрен тоташтыручы кисемтәләрнең бер-берсенә тигез икәнен исбатлагыз.

286 Төзек тетраэдрда h — биеклек, m — кабырга, ә n — кырларының үзәкләре арасындагы ераклык. а) m ны h аша; б) n ны m аша аңлатыгыз.

287 Төзек октаэдрның кабыргасы a га тигез. а) Аның капма-каршы ике түбәсе; б) чиктәш ике кырының үзәкләре; в) капма-каршы кырлары арасындагы ераклыкны табыгыз.

III бүлеккә сораулар

1 Күпкырлыкның кимендә ничә кабыргасы була?

2 Призманың n кыры бар. Аның нигезендә нинди күппочмак ята?

3 Призманың чиктәш ике ян кыры нигез яссылыгына перпендикуляр булса, ул туры призма буламы?

4 Нинди призмада ян кабыргалар аның биеклегенә параллель?

5 Барлык кабыргалары да бер-берсенә тигез булса, призма төзек буламы?

6 Авыш призмада бер ян кырының биеклеге призманың да биеклеге була аламы?

7 а) Ян кабыргасы нигезенең бары тик бер генә кабыргасына перпендикуляр; б) бары тик бер генә кыры нигезгә перпендикуляр булган призма бармы?

8 Өчпочмаклы төзек призма нигезләренең урта сызыклары аша үтүче яссылык белән ике призмага бүленә. Бу призмаларның ян өслекләренең мәйданнары чагыштырмасы нинди?

9 Пирамиданың ян кырлары төзек өчпочмаклар булса, ул төзек пирамида буламы?

10 Пирамиданың ничә кыры нигез яссылыгына перпендикуляр булуы мөмкин?

11 Капма-каршы ян кырлары нигезгә перпендикуляр булган дүртпочмаклы пирамида бармы?

12 Өчпочмаклы пирамиданың барлык кырлары да турыпочмаклы өчпочмаклар булуы мөмкинме?

13 66 см озынлыктагы тимерчыбык кисәгеннән нигезенең ягы 10 см га тигез булган дүртпочмаклы төзек пирамиданың каркас моделен ясап буламы?

14 Өчпочмаклы призма өске нигезенең түбәсе һәм аскы нигезенең аңа каршы яткан ягы аша үтүче яссылык белән нинди күпкырлыкларга бүленә?

Өстәмә мәсьәләләр

288 Теләсә нинди призманың түбәләре саны — җөп сан, ә кабыргалары саны 3 кә кабатлы икәнен исбатлагыз.

289 Кубның тулы өслеге мәйданы $2\,d^2$ ка (биредә d — кубның диагонале) тигез икәнен исбатлагыз.

290 Турыпочмаклы параллелепипедның l га тигез нигез диагонале белән нигезенең бер ягы арасындагы почмагы φ гә тигез. Бу як белән параллелепипед диагонале арасындагы почмак θ га тигез. Бирелгән параллелепипедның ян өслеге мәйданын табыгыз.

291 Турыпочмаклы параллелепипедта d га тигез диагонале — нигез яссылыгы белән φ, нигезенең бер ягы белән θ почмагы төзи. Параллелепипедның ян өслеге мәйданын табыгыз.

292 Дүртпочмаклы төзек призмада нигезенең ягы 6 см га, ян кабыргасы 8 см га тигез. Призманың нигез ягыннан аны кисмәүче диагоналенә кадәр ераклыкны табыгыз.

293 Дүртпочмаклы төзек $ABCDA_1B_1C_1D_1$ призмасында B_1D һәм D_1B диагональләре үзара перпендикуляр. Призманың A_1C һәм B_1D диагональләре арасындагы почмагы $60°$ка тигез икәнен исбатлагыз.

294 Дүртпочмаклы төзек призма ике диагонален эченә алган яссылык белән кистерелгән. Килеп чыккан кисем мәйданы S_0 гә, ә нигезенең ягы a га тигез. Призманың ян өслеге мәйданын исәпләгез.

295 Авыш $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедының нигезе булып ромб хезмәт итә. CC_1 ян кабыргасы нигезенең CD һәм CB яклары белән тигез почмаклар төзи. а) $CC_1 \perp BD$; б) BB_1D_1D — турыпочмаклык; в) $BD \perp AA_1C_1$; г) $AA_1C_1 \perp BB_1D_1$ икәнен исбатлагыз.

296 Өчпочмаклы төзек призманың биеклеге h ка тигез. Аскы нигезенең урта сызыгы һәм өске нигезенең аңа параллель ягы аша үткәрелгән α яссылыгы аскы нигез яссылыгы белән кысынкы икекырлы φ почмагы төзи. Призманың α яссылыгы белән кисеменең мәйданын табыгыз.

297 Өчпочмаклы $ABCA_1B_1C_1$ призмасының нигезе — төзек ABC өчпочмагы, BD — бу өчпочмакның биеклеге, ә A_1 түбәсе аның үзәгенә проекцияләнә. а) $A_1BD \perp AA_1C_1$; б) $AA_1O \perp BB_1C$; в) BB_1C_1C кыры турыпочмаклык икәнен исбатлагыз.

298 Ян кабыргасы b га тигез булган параллелепипедның нигезендә ягы a га тигез квадрат ята. Өске нигезнең бер түбәсе аскы нигезнең барлык түбәләреннән тигез ераклыкта урнашкан. Параллелепипедның тулы өслеге мәйданын табыгыз.

299 Өчпочмаклы төзек пирамиданың нигез ягы m га тигез, ә ян өслек мәйданы нигез мәйданыннан ике тапкыр зуррак булса, пирамиданың биеклеген табыгыз.

300 Төзек өчпочмаклы $DABC$ пирамидасында E, F һәм P нокталары — BC, AB һәм ADякларының урталары. Бу нокталар аша үтүче кисемнең төрен билгеләгез һәм пирамиданың нигез ягы a га, ян кабыргасы b га тигез булса, кисемнең мәйданын табыгыз.

301 Төзек өчпочмаклы $DABC$ пирамидасының ян кабыргасы янындагы икекырлы почмагы $120°$. B түбәсеннән DA ян кабыргасына кадәр ераклык 16 см га тигез. Пирамиданың апофемасын табыгыз.

302 Пирамиданың нигезендә яклары 3 см, 7 см һәм бер диагонале 6 см булган параллелограмм ята. Пирамиданың биеклеге нигез диагональләренең кисешү ноктасы аша үтә һәм 4 см га тигез. Пирамиданың ян кабыргаларын табыгыз.

303 Пирамиданың нигезе — ромб. Ике ян кыры нигез яссылыгына перпендикуляр һәм $120°$лы икекырлы почмак төзи, ә калган ике ян кыры нигез яссылыгына $30°$лы почмак ясап авышкан. Пирамиданың биеклеге 12 см булса, аның өслек мәйданын табыгыз.

304 Дүртпочмаклы төзек пирамиданың түбә янындагы яссы почмагы 60°ка тигез. Пирамиданың ян кыры белән нигезе арасындагы икекырлы почмагы ян кабыргасы янындагы икекырлы почмагыннан ике тапкыр кечерәк икәнен исбатлагыз.

305 Дүртпочмаклы төзек пирамиданың биеклеге h ка, түбә янындагы яссы почмагы α га тигез. Пирамиданың ян өслеге мәйданын табыгыз.

306 Дүртпочмаклы төзек пирамиданың биеклеге h ка тигез һәм ян кыр яссылыгы белән φ почмагы төзи. Пирамиданың тулы өслеге мәйданын табыгыз.

307 Төзек $MABCD$ пирамидасында $AM = b$, $AD = a$. а) Пирамида нигезенең BD диагонале аша MA кабыргасына параллель үтүче α яссылыгы белән пирамиданың кисемен төзегез һәм кисем мәйданын табыгыз; б) M һәм C нокталары α яссылыгыннан тигез ераклыкта икәнен исбатлагыз.

308 Ягы 5 см, кечерәк диагонале 6 см га тигез булган ромб пирамиданың нигезе булып хезмәт итә. Пирамиданың биеклеге 3,2 см га тигез һәм ромб диагональләренең кисешү ноктасы аша үтә. Пирамида кырларының түбәдән үткәрелгән биеклекләрен табыгыз.

309 Ян кабыргалары тигез булган пирамиданың нигезендә яклары 6 дм һәм 8 дм га тигез турыпочмаклык ята. Пирамиданың биеклеге 6 дм га тигез. Кечерәк ягы һәм биеклегенең уртасы аша үткәрелгән кисемнең мәйданын табыгыз.

310 $DABC$ пирамидасында DA кабыргасы ABC яссылыгына перпендикуляр. $AB = AC = 25$ см, $BC = 40$ см, $DA = 8$ см булса, пирамиданың ян өслеге мәйданын табыгыз.

311 Яклары $AC = 13$ см, $AB = 15$ см, $CB = 14$ см булган өчпочмак — $DABC$ пирамидасының нигезе. DA ян кабыргасы нигез яссылыгына перпендикуляр һәм 9 см га тигез. а) Пирамиданың тулы өслеге мәйданын табыгыз; б) A түбәсеннән BDC кыры яссылыгына үткәрелгән перпендикулярның нигезе шул кырның биеклегендә ятканын исбатлагыз һәм перпендикулярның озынлыгын табыгыз.

312 n-почмаклы төзек пирамиданың ян кырлары нигез яссылыгы белән φ почмагы төзиләр. Нигез яссылыгы белән ян кабырга арасындагы почмакның тангенсын табыгыз.

313 Өчпочмаклы төзек кисек пирамиданың нигез яклары 12 дм һәм 6 дм, биеклеге 1 дм. Пирамиданың ян өслеге мәйданын табыгыз.

314 Дүртпочмаклы төзек кисек пирамиданың биеклеге 63 см га, апофемасы 65 см га тигез, ә нигезенең яклары 7 : 3 чагыштырмасында. Пирамиданың нигез якларын табыгыз.

315 Төзек октаэдр кырларының үзәкләре кубның түбәләре булуын исбатлагыз.

316 Төзек тетраэдр кырларының үзәкләре икенче төзек тетраэдрның түбәләре икәнен исбатлагыз.

317 Куб кырларының үзәкләре — төзек октаэдр түбәләре. Исбатлагыз.

318 Төзек тетраэдрның икекырлы почмагы белән төзек октаэдрның икекырлы почмагының суммасы 180°ка тигез икәнен исбатлагыз.

319 Төзек тетраэдрның түбәсе аша ничә симметрия яссылыгы үтә?

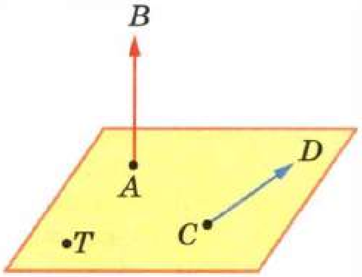
IV бүлек
Пространствода векторлар

§ 1 Пространствода вектор төшенчәсе

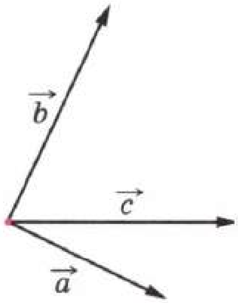
38 Вектор төшенчәсе

Планиметрия курсында без яссылыктагы векторлар һәм алар белән эшләү гамәлләрен өйрәндек. Пространстводагы векторлар өчен төп төшенчәләр яссылыктагы векторлар өчен бирелгән кебек үк бирелә.

Кайсы очы — башлангычы, кайсысы ахыры икәнлеге күрсәтелгән кисемтә **вектор** дип атала. Рәсемнәрдә векторның юнәлеше (башлангычыннан ахырына таба) ук белән күрсәтелә. Пространствоның теләсә кайсы ноктасын шулай ук вектор дип карарга мөмкин. Андый вектор **нуль-вектор** дип атала. Нуль-векторның башлангычы белән ахыры тәңгәл килә, һәм ул нинди дә булса билгеле бер юнәлешкә ия түгел. 100, *а* рәсемендә нуль булмаган $\overrightarrow{AB}$ һәм $\overrightarrow{CD}$ векторлары һәм $\overrightarrow{TT}$ нуль-векторы, ә 100, *б* рәсемендә уртак башлангычка ия һәм нуль булмаган $\vec{a}$, $\vec{b}$ һәм $\vec{c}$ векторлары сурәтләнгән. Нуль-вектор шулай ук $\vec{0}$ символы белән дә тамгалана.



а)



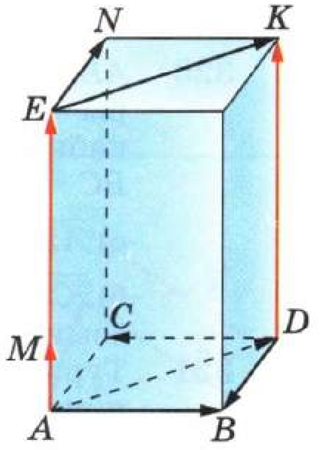
б)

Рәс. 100

Нуль булмаган $\overrightarrow{AB}$ векторының озынлыгы дип AB кисемтәсенең озынлыгы атала. $\overrightarrow{AB}$ векторының ($\vec{a}$ векторының) озынлыгы болай тамгалана: $|\overrightarrow{AB}|$ ($|\vec{a}|$). Нуль-векторның озынлыгы нульгә тигез дип исәпләнә: $|\vec{0}| = 0$.

Нуль булмаган ике вектор бер турыда яки параллель турыларда ятса, алар **коллинеар** дип атала. Әгәр нуль булмаган $\overrightarrow{AB}$ һәм $\overrightarrow{CD}$ векторлары коллинеар һәм шул ук вакытта AB һәм CD нурлары бердәй юнәлештә булсалар, $\overrightarrow{AB}$ һәм $\overrightarrow{CD}$ векторлары **бердәй юнәлешле** дип, ә бу нурлар бердәй юнәлештә булмасалар, $\overrightarrow{AB}$ һәм $\overrightarrow{CD}$ векторлары **капма-каршы юнәлешле** дип атала. Нуль-векторны теләсә нинди вектор белән бердәй юнәлешле дип исәпләрбез. $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ язылышы —

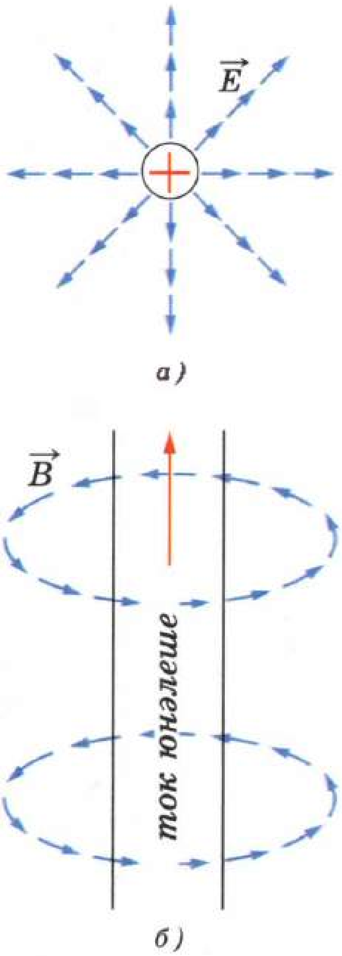
$\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторларының бердәй юнәлешле, ә $\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{d}$ язылышы $\vec{c}$ һәм $\vec{d}$ векторларының капма-каршы юнәлешле икәнлеген белдерә. 101 нче рәсемдә параллелепипед сурәтләнгән. Бу рәсемдә $\overrightarrow{AM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DK}$, $\overrightarrow{AD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{DC}$, ә $\overrightarrow{AD}$ һәм $\overrightarrow{AM}$ векторлары бердәй юнәлешле дә, капма-каршы юнәлешле дә була алмый, чөнки алар коллинеар түгел.



Рәс. 101

Яссылыкта векторларны өйрәнгәндә, без күп кенә физик зурлыкларның, мәсәлән, көч, күчү, тизлекнең вектор зурлыклар булуын билгеләп үттек. Электр һәм магнит күренешләрен өйрәнгәндә, вектор зурлыкларга яңа мисаллар өстәлә. Пространствода корылмалар тудырган электр кыры пространствоның һәр ноктасында электр кырының көчәнешлелек векторы белән күрсәтелә. 102, *а* рәсемендә ноктадай уңай корылма тудырган электр кырының көчәнешлелек векторлары сурәтләнгән.

Пространствоның һәр ноктасында магнит индукциясе векторы белән күрсәтелә торган магнит кыры пространствода электр тогы, ягъни корылмаларның юнәлешле хәрәкәтен тудыра. 102, *б* рәсемендә току туры үткәргечнең магнит кырында магнит индукциясе векторлары сурәтләнгән.

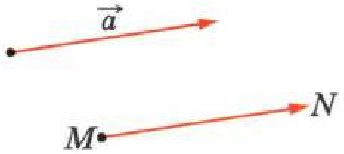


Рәс. 102

39 Векторларның тигезлеге

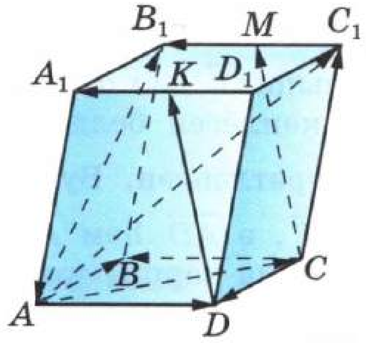
Векторлар бердәй юнәлешле һәм аларның озынлыклары тигез булса, алар **тигез** дип атала. 101 нче рәсемдә $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DK}$, чөнки $\overrightarrow{AE} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DK}$ һәм $|\overrightarrow{AE}| = |\overrightarrow{DK}|$, ә $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{DC}$, чөнки $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{DC}$.

A ноктасы $\vec{a}$ векторының башлангычы булса, $\vec{a}$ векторы *A* ноктасыннан салынган, диләр. **Теләсә нинди ноктадан бирелгәнгә тигез вектор салырга мөмкин һәм бары тик берне генә,** моны җиңел исбатлап була. Дөрестән дә, $\vec{a}$ — бирелгән вектор, *M* — бирелгән нокта булсын (рәс.103). $\vec{a}$ векторының башлангычы, ахыры һәм *M* ноктасы аша яссылык үткәрәбез дә бу яссылыкта $\vec{a} = \overrightarrow{MN}$ векторы төзибез. $\overrightarrow{MN}$ — эзләнелә торган вектор икәнлеге күренеп тора. Шулай ук төзүдән $\overrightarrow{MN}$ — башлангычы *M* булган һәм $\vec{a}$ векторына тигез бердәнбер вектор икәнлеге ачык аңлашыла.



Рәс. 103

Сораулар һәм мәсьәләләр



Рәс. 104

320 $ABCD$ тетраэдрында M, N һәм K нокталары — тиңдәшле рәвештә AC, BC һәм CD кабыргаларының урталары, $AB = 3$ см, $BC = 4$см, $BD = 5$ см.

а) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{NK}$;

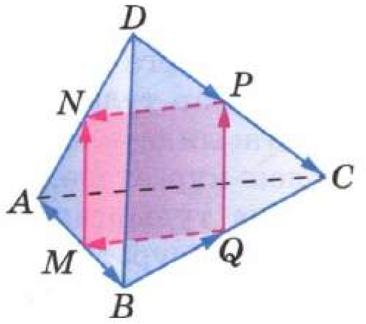
б) $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{KN}$ векторларының озынлыгын табыгыз.

321 Турыпочмаклы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедының үлчәнешләре: $AD = 8$ см, $AB = 9$ см һәм $AA_1 = 12$ см.

а) $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$;

б) $\overrightarrow{DC_1}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DB_1}$

векторларының озынлыгын табыгыз.



Рәс. 105

322 104 нче рәсемдә $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеды сурәтләнгән. M һәм K нокталары — B_1C_1 һәм A_1D_1 кабыргаларының урталары. Бу рәсемдә: а) бердәй юнәлешле векторларның; б) капма-каршы юнәлешле векторларның; в) тигез векторларның барлык парларын күрсәтегез.

323 105 нче рәсемдә кабыргалары тигез булган $ABCD$ тетраэдры сурәтләнгән. M, N, P һәм Q нокталары — AB, AD, DC, BC якларының урталары. а) Бу рәсемдә сурәтләнгән тигез векторларның барлык парларын язып алыгыз; б) $MNPQ$ дүртпочмагының төрен билгеләгез.

324 Раслама дөресме: а) нуль булмаган векторга коллинеар ике вектор үзара коллинеар; б) нуль булмаган вектор белән бердәй юнәлешле ике вектор бердәй юнәлешле; в) нуль булмаган векторга коллинеар ике вектор бердәй юнәлешле?

325 $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$ икәне билгеле. Бер-берсенә карата ничек урнашканнар: а) AB һәм A_1B_1 турылары; б) AB турысы һәм A_1, B_1 нокталары аша үтүче яссылык; в) берсе A һәм B нокталары аша, икенчесе A_1 һәм B_1 нокталары аша үтүче яссылыклар?

326 104 нче рәсемдә параллелепипед сурәтләнгән, M һәм K нокталары — B_1C_1 һәм A_1D_1 кабыргаларының урталары. а) C ноктасыннан $\overrightarrow{DD_1}$ векторына тигез; б) D ноктасыннан $\overrightarrow{CM}$ векторына тигез; в) A_1 ноктасыннан $\overrightarrow{AC}$ векторына тигез; г) C_1 ноктасыннан $\overrightarrow{CB}$ векторына тигез; д) M ноктасыннан $\overrightarrow{KA_1}$ векторына тигез итеп салынган векторны атагыз.

§ 2 Векторларны кушу һәм алу. Векторны санга тапкырлау

40 Векторларны кушу һәм алу

Теләсә нинди $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторларын кушу кагыйдәсен бирик. Нинди дә булса A ноктасыннан $\vec{a}$ векторына тигез булган $\overrightarrow{AB}$ векторын салабыз (рәс.106). Аннары B ноктасыннан $\vec{b}$ векторына тигез $\overrightarrow{BC}$ векторын салабыз. $\overrightarrow{AC}$ векторы $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ **векторларының суммасы** дип атала: $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.

Векторларны кушуның бу кагыйдәсе **өчпочмак кагыйдәсе** дип атала. 106, *а* рәсеме бу кагыйдәне ачыклый. Коллинеар векторларны кушканда өчпочмак килеп чыкмаса да, аларның да шушы ук кагыйдә буенча кушылганын искәртеп китәбез. 106, *б*, *в* рәсемнәре коллинеар векторларны кушуны иллюстрацияли.

Нәкъ планиметриядәге кебек үк, $\vec{a} + \vec{b}$ **суммасы, кушканда $\vec{a}$ векторын сала башлау өчен, A ноктасын кайда сайлап алуга бәйле түгел**. Икенче сүзләр белән әйткәндә, $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторларын өчпочмак кагыйдәсе буенча кушканда, A ноктасын икенче бер A_1 ноктасы белән алмаштырсак, ул вакытта $\overrightarrow{AC}$ векторы аңа тигез $\overrightarrow{A_1C_1}$ векторы белән алмашыныр (рәс. 107). Бу расламаны үзлегегездән исбатлагыз.

Өчпочмак кагыйдәсен мондый формада әйтеп бирергә мөмкин: **теләсә нинди өч нокта A, B һәм C өчен түбәндәге тигезлек урынлы була:**

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} .$$

Коллинеар булмаган ике векторны кушу өчен, шулай ук планиметрия курсыннан билгеле булган параллелограмм кагыйдәсеннән файдаланырга мөмкин. Бу кагыйдә 108 нче рәсемдә ачыклана.

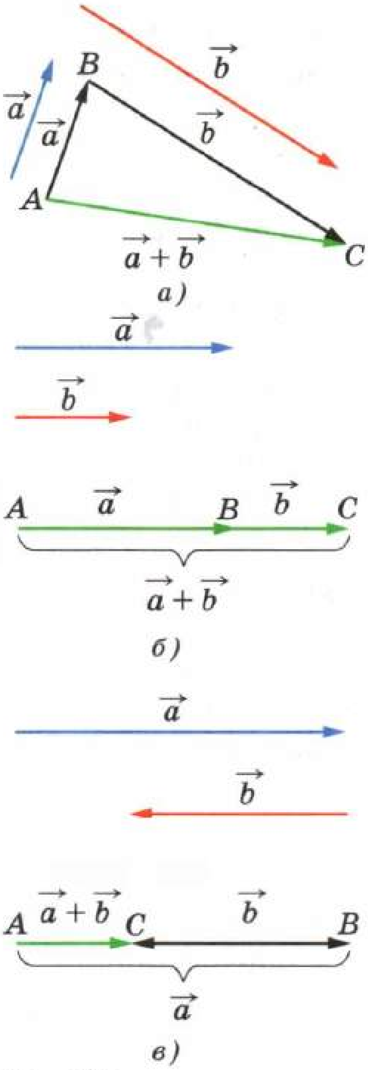
Векторларны кушуның планиметриядә өйрәнелгән үзлекләре пространстводагы векторлар өчен дә урынлы. Аларны искә төшереп үтик.

Теләсә нинди $\vec{a}$, $\vec{b}$ һәм $\vec{c}$ векторлары өчен түбәндәге тигезлекләр дөрес:

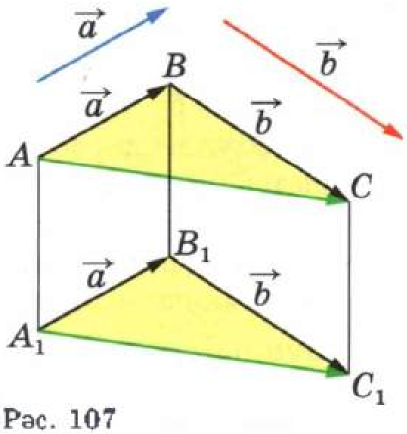
$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ **(урын алыштыру законы);**

$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ **(оештыру законы).**

Нуль булмаган ике векторның озынлыклары тигез һәм алар капма-каршы юнәлгән булсалар,



Рәс. 106



Рәс. 107

алар **капма-каршы векторлар** дип атала. Нуль-векторга нуль-вектор капма-каршы дип исәпләнә. $\overrightarrow{BA}$ векторы $\overrightarrow{AB}$ векторына капма-каршы икәнлеге ачык аңлашыла (рәс. 109).

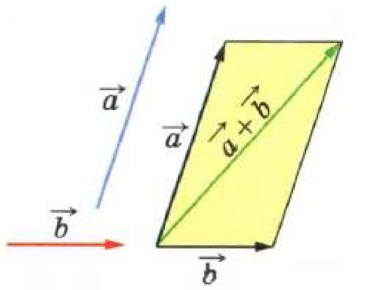
$\vec{b}$ векторы белән суммасы $\vec{a}$ векторына тигез булган вектор $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторларының аермасы дип атала. $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторларының аермасы $\vec{a} - \vec{b}$ ны

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) \qquad (1)$$

формуласыннан табарга мөмкин, биредә $(-\vec{b})$ векторы $\vec{b}$ векторына капма-каршы.

110, *а, б* рәсемнәрендә бирелгән $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторларының аермасын төзүнең ике ысулы күрсәтелгән.

Пространстводагы векторлар өчен кушу законнарын һәм (1) тигезлеген исбатлау яссылыктагы векторлар өчен исбатлаудан берни белән дә аерылмый.



Коллинеар булмаган ике векторны кушуның параллелограмм кагыйдәсе

Рәс. 108

$\overrightarrow{AB}$ һәм $\overrightarrow{BA}$ — капма-каршы векторлар

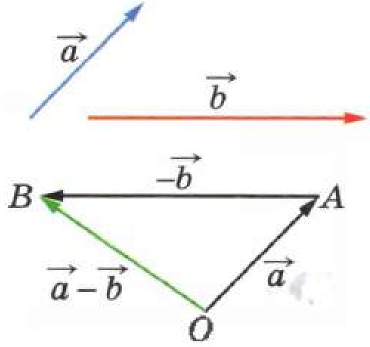
Рәс. 109

41 Берничә векторның суммасы

Пространстводагы берничә векторны кушу яссылыктагы кебек үк башкарыла: беренче вектор икенчесе белән кушыла, аннары аларның суммасы өченче вектор белән кушыла һ. б. Векторларны кушу законнарыннан **берничә векторның суммасы аларны нинди тәртиптә кушуга бәйле түгел** икәнлеге килеп чыга.

111 нче рәсемдә $\vec{a}$, $\vec{b}$ һәм $\vec{c}$ векторларының суммасын төзү күрсәтелгән: ирекле рәвештә алынган *O* ноктасыннан $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ векторы салынган, аннары *A* ноктасыннан $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ векторы салынган һәм, ниһаять, *B* ноктасыннан $\vec{c} = \overrightarrow{BC}$ векторы салынган. Нәтиҗәдә $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ га тигез $\overrightarrow{OC}$ векторы табыла.

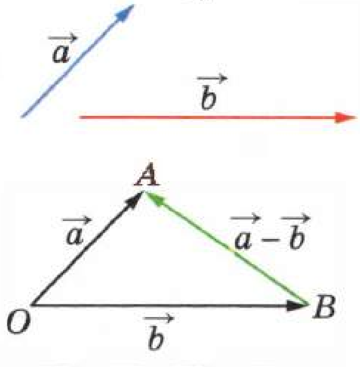
Теләсә нинди сандагы векторлар суммасын да шушыңа охшаш юл белән табарга була. 112 нче рәсемдә биш вектор: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ һәм $\vec{e}$ ның суммасы $\overrightarrow{OE}$ векторы төзелгән. Берничә векторның суммасын төзүнең бу кагыйдәсе **күппочмак кагыйдәсе** дип атала. Шулай да, яссылыктагы векторлар очрагыннан аермалы буларак, пространстводагы векторлар суммасын төзегәндә пространство «күппочмагы» килеп чыгуы, ягъни күппочмакның барлык түбәләре дә бер яссылыкта ятмавы мөмкин икәнен искәртеп китәбез. Мәсәлән, шундый юл белән $\overrightarrow{OC}$ векторын төзегәндә, 111 нче рәсемдә килеп чыккан *OABC* «дүртпочмагы» шундый дүртпочмак була.



$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = -\vec{b}$

$\overrightarrow{OB} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$

а)



$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$

$\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$

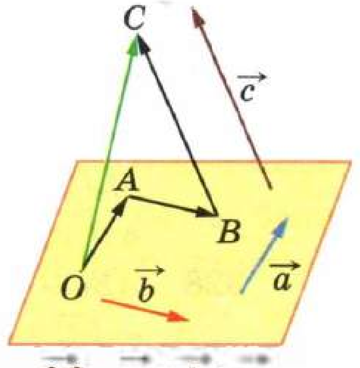
б)

Рәс. 110

Күппочмак кагыйдәсен болай әйтеп бирергә дә мөмкин: $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — ирекле рәвештә алынган нокталар булса, ул вакытта

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}.$$

113 нче рәсемдә бу кагыйдә $n = 7$ өчен сурәтләнгән. Аерым алганда, әгәр A_1 һәм A_n нокталары, ягъни беренче векторның башлангычы белән соңгы векторның ахыры тәңгәл килсә, векторларның суммасы нуль-векторга тигез була.



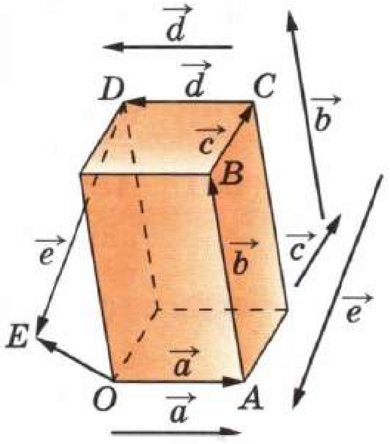
$\overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

Рәс. 111

42 Векторны санга тапкырлау

Нуль булмаган векторның k санына тапкырчыгышы дип озынлыгы $|k| \cdot |\vec{a}|$ га тигез булган $\vec{b}$ векторы атала, өстәвенә $k > 0$ булганда, $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары бердәй юнәлешле, $k < 0$ булганда, капма-каршы юнәлешле була. Нуль-векторның теләсә нинди санга тапкырчыгышы нуль-вектор дип исәпләнә.

$\vec{a}$ векторының k санына тапкырчыгышы болай тамгалана: $k\vec{a}$. Векторның санга тапкырчыгышы билгеләмәсеннән **теләсә нинди k саны һәм теләсә нинди $\vec{a}$ векторы өчен $\vec{a}$ һәм $k\vec{a}$ векторларының коллинеар икәнлеге килеп чыга.** Бу билгеләмәдән шулай ук **теләсә нинди векторның нуль санына тапкырчыгышы нуль-вектор икәнлеге килеп чыга.**



Рәс. 112

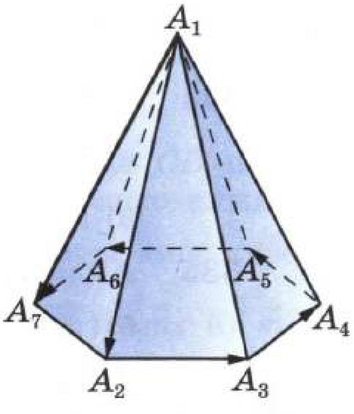
Векторны санга тапкырлауның яссылыктагы векторлар өчен безгә таныш төп үзлекләрен искә төшереп китик. Алар пространстводагы векторлар өчен дә урынлы. **Теләсә нинди $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторлары һәм теләсә нинди k, l саннары өчен түбәндәге тигезлекләр дөрес:**

$(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$ (оештыру законы);

$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ (беренче тарату законы);

$(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$ (икенче тарату законы).

$(-1)\vec{a}$ векторы $\vec{a}$ векторына капма-каршы, ягъни $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$ икәнен билгеләп үтәбез. Дөрестән дә, $(-1)\vec{a}$ һәм $\vec{a}$ векторларының озынлыклары тигез: $|(-1)\vec{a}| = |-1| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|$. Моннан тыш, $\vec{a}$ — нуль булмаган вектор булса, $(-1)\vec{a}$ һәм $\vec{a}$ векторлары капма-каршы юнәлгәннәр.



$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{A_4A_5} + \overrightarrow{A_5A_6} + \overrightarrow{A_6A_7} = \overrightarrow{A_1A_7}$

Рәс. 113

Нәкъ планиметриядәге кебек үк, **әгәр $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары коллинеар һәм $\vec{a} \neq \vec{0}$ булса, $\vec{b} = k\vec{a}$ үтәлердәй k саны барлыгын** исбатларга мөмкин.

Мәсьәләләр

327 104 нче рәсемдә $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеды сурәтләнгән. Озынлыгы а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A_1D_1}$; б) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD_1}$; в) $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{B_1B}$; г) $\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{DB}$; д) $\overrightarrow{DB_1}+\overrightarrow{BC}$ векторларының суммасына тигез, ә башлангычы һәм ахыры параллелепипед түбәләре булган векторны атагыз.

328 $ABCD$ тетраэдры бирелгән. а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}$; в) $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}$ икәнен исбатлагыз.

329 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедының кабыргаларыннан барлыкка килгән һәм а) $\overrightarrow{CB}$ векторына капма-каршы; б) $\overrightarrow{B_1A}$ векторына капма-каршы; в) $-\overrightarrow{DC}$ векторына тигез; г) $-\overrightarrow{A_1B_1}$ векторына тигез булган барлык векторларны атагыз.

330 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедын сызыгыз һәм $\overrightarrow{C_1D_1}$, $\overrightarrow{BA_1}$, $\overrightarrow{AD}$ векторларын тиңдәшле рәвештә $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ дип билгеләгез. а) $\vec{a}-\vec{b}$; б) $\vec{a}-\vec{c}$; в) $\vec{b}-\vec{a}$; г) $\vec{c}-\vec{b}$; д) $\vec{c}-\vec{a}$ векторларын рәсемдә сурәтләгез.

331 $ABCD$ — параллелограмм, ә O пространствода ирекле рәвештә алынган нокта булсын. а) $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$; б) $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{DA}$ икәнен исбатлагыз.

332 104 нче рәсемдә $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеды сурәтләнгән. $\overrightarrow{AB_1}$ һәм $\overrightarrow{DK}$ векторларын башлангычы һәм ахыры рәсемдә билгеләнгән нокталар белән тәңгәл килүче ике векторның аермасы рәвешендә күрсәтегез.

333 Пространствода A, B, C һәм D нокталары бирелгән. а) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DC})+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})$; б) $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})+\overrightarrow{DC}$ векторлары суммасына тигез, ә бирелгән нокталар башлангычы һәм ахыры булган векторны атагыз.

334 Турыпочмаклы $KLMNK_1L_1M_1N_1$ параллелепипеды бирелгән.
а) $|\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{MM_1}|=|\overrightarrow{MK}-\overrightarrow{MM_1}|$; б) $|\overrightarrow{K_1L_1}-\overrightarrow{NL_1}|=|\overrightarrow{ML}+\overrightarrow{MM_1}|$;
в) $|\overrightarrow{NL}-\overrightarrow{M_1L}|=|\overrightarrow{K_1N}-\overrightarrow{LN}|$ икәнен исбатлагыз.

335 Аңлатманы гадиләштерегез: а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{NM}$; б) $\overrightarrow{FK}+\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{KP}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{QK}+\overrightarrow{PF}$; в) $\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{FK}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MP}$; г) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{NM}$.

336 A, B, C һәм D нокталары бирелгән. $\overrightarrow{AB}$ векторын: а) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BD}$; б) $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BC}$ векторларының суммасы рәвешендә күрсәтегез.

337 Аңлатманы гадиләштерегез: а) $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{EP}+\overrightarrow{KD}-\overrightarrow{KA}$; б) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{EK}-\overrightarrow{EP}-\overrightarrow{MD}$; в) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BM}$.

338 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеды бирелгән. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA_1}$ икәнен исбатлагыз (биредә O — пространствода ирекле алынган нокта).

339 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеды бирелгән. а) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{D_1A_1} + \overrightarrow{CD_1} + \vec{x} + \overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{DB}$; б) $\overrightarrow{DA} + \vec{x} + \overrightarrow{D_1B} + \overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}$ булса, башлангычы һәм ахыры параллелепипед түбәләре булган $\vec{x}$ векторын күрсәтегез.

340 Өчпочмаклы $ABCA_1B_1C_1$ призмасы бирелгән. а) $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{B_1C} - \vec{x} = \overrightarrow{BA}$; б) $\overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{BB_1} + \vec{x} = \overrightarrow{AB}$; в) $\overrightarrow{AB_1} + \vec{x} = \overrightarrow{AC} - \vec{x} + \overrightarrow{BC_1}$ булса, башлангычы һәм ахыры призма түбәләре булган $\vec{x}$ векторын күрсәтегез.

341 Түбәсе P булган дүртпочмаклы пирамиданың нигезендә $ABCD$ трапециясе ята. O ноктасы — трапециянең урта сызыгының уртасы. $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4\overrightarrow{PO}$ икәнен исбатлагыз.

342 P ноктасы — алтыпочмаклы төзек пирамиданың түбәсе. Пирамиданың ян кабыргалары тәшкил иткән, башлангычы P ноктасында булган барлык векторларның суммасы башлангычы P ноктасындагы апофемаларыннан торган векторларның суммасына тигез икәнен исбатлагыз.

343 $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ икәне билгеле. A һәм B нокталары O ноктасына карата симметрик икәнен исбатлагыз.

344 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының диагональләре O ноктасында кисешә. а) $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{AC_1} = k \cdot \overrightarrow{AO}$; в) $\overrightarrow{OB_1} = k \cdot \overrightarrow{B_1D}$ үтәлердәй k санын табыгыз.

345 E һәм F нокталары — $ABCD$ параллелограммында AB һәм BC нигезләренең урталары, ә O — пространствода ирекле рәвештә алынган нокта. а) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$ векторын $\overrightarrow{EF}$ векторы аша; б) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OE}$ векторын $\overrightarrow{DC}$ векторы аша күрсәтегез.

346 M һәм N нокталары — $ABCD$ трапециясендә AB һәм CD нигезләренең урталары, O — пространствода ирекле рәвештә алынган нокта. $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}$ векторын $\overrightarrow{AD}$ һәм $\overrightarrow{BC}$ векторлары аша күрсәтегез.

347 Аңлатманы гадиләштерегез: а) $2(\vec{m} + \vec{n}) - 3(4\vec{m} - \vec{n}) + \vec{m}$; б) $\vec{m} - 3(\vec{n} - 2\vec{m} + \vec{p}) + 5(\vec{p} - 4\vec{m})$.

348 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеды бирелгән. $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{B_1D} = 2\overrightarrow{BC}$ икәнен исбатлагыз.

349 A, B һәм M нокталары $\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{MB}$ (биредә $\lambda \neq -1$) шартын канәгатьләндерә. Бу өч ноктаның бер турыда ятканын һәм пространствоның теләсә нинди O ноктасы өчен $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{OB}}{1 + \lambda}$ тигезлеге төгәл үтәлгәнен исбатлагыз.

Чишү

$\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{MB}$ тигезлегеннән $\overrightarrow{AM}$ һәм $\overrightarrow{MB}$ векторларының коллинеар икәнлеге килеп чыга, шуңа күрә AM һәм MB турылары я параллель, я тәңгәл килә. Бу турылар уртак M ноктасына ия, шуңа күрә алар тәңгәл киләләр, димәк, A, B һәм M нокталары бер турыда ята. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}$ булганлыктан, $\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{MB}$ тигезлегеннән чыгып яза алабыз: $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})$, яки $(1 + \lambda)\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{OB}$. Моннан $1 + \lambda$ га бүлеп, эзләнелгән тигезлекне табабыз.

350 $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, шуның белән бергә, $\vec{a}$, $\vec{b}$ һәм $\vec{c}$ векторлары парпар бердәй юнәлешле түгел икәне билгеле. $|\vec{p}| < |\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}|$ икәнен исбатлагыз.

351 $\vec{a}$ һәм $\vec{c}$, ә шулай ук $\vec{b}$ һәм $\vec{c}$ векторлары коллинеар. а) $\vec{a} + \vec{b}$ һәм $\vec{c}$; б) $\vec{a} - \vec{b}$ һәм $\vec{c}$; в) $\vec{a} + 3\vec{b}$ һәм $\vec{c}$; г) $-\vec{a} + 2\vec{b}$ һәм $\vec{c}$ векторлары коллинеар икәнен исбатлагыз.

352 $\vec{a} + \vec{b}$ һәм $\vec{a} - \vec{b}$ векторлары коллинеар. $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары коллинеар икәнен исбатлагыз.

353 $\vec{a} + 2\vec{b}$ һәм $\vec{a} - 3\vec{b}$ векторлары коллинеар. $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары коллинеар икәнен исбатлагыз.

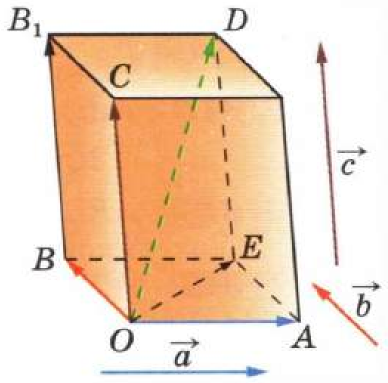
354 $\vec{a} + \vec{b}$ һәм $\vec{a} - \vec{b}$ векторлары коллинеар булмаса, а) $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары коллинеар түгел; б) $\vec{a} + 2\vec{b}$ һәм $2\vec{a} - \vec{b}$ векторлары коллинеар түгел икәнен исбатлагыз.

§ 3 Компланар векторлар

43 Компланар векторлар

Бер үк ноктадан салганда, векторлар бер яссылыкта ятса, алар **компланар векторлар** дип атала. Икенче сүзләр белән әйткәндә, әгәр векторларга бер яссылыкта яткан башка тигез булган векторлар булса, алар компланар дип атала.

Теләсә нинди ике векторның компланар икәнлеге ачык; өч векторның икесе коллинеар булса, алар шулай ук компланар (ни өчен икәнен аңлатыгыз), ә теләсә нинди өч векторның компланар булуы һәм компланар булмавы да мөмкин. 114 нче рәсемдә параллелепипед сурәтләнгән. $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{OD}$ һәм $\overrightarrow{OE}$ векторлары компланар, чөнки O ноктасыннан $\overrightarrow{BB_1}$ гә тигез вектор салсак, $\overrightarrow{OC}$ векторы табылыр, ә $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ һәм $\overrightarrow{OE}$ век-



Рәс. 114

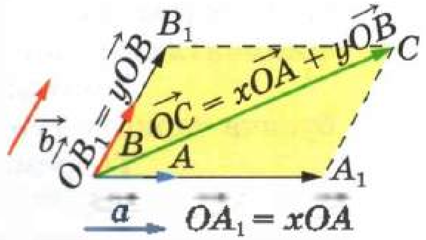
торлары бер үк OCE яссылыгында яталар. $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ һәм $\overrightarrow{OC}$ векторлары компланар түгел, чөнки $\overrightarrow{OC}$ векторы OAB яссылыгында ятмый. Өч векторның компланарлык билгесен карыйк.

Әгәр $\vec{c}$ векторын $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары буенча таркатып, ягъни

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b} \qquad (1)$$

рәвешендә күрсәтеп булса (биредә x һәм y — ниндидер саннар), ул вакытта $\vec{a}$, $\vec{b}$ һәм $\vec{c}$ векторлары компланар.

Бу билгене исбатлыйк. $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары коллинеар түгел дип исәплик (әгәр $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары коллинеар булса, $\vec{a}$, $\vec{b}$ һәм $\vec{c}$ векторларының компланар икәнлеге үзеннән-үзе аңлашыла). Теләсә нинди O ноктасыннан $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ һәм $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ векторларын салабыз (рәс. 115). $\overrightarrow{OA}$ һәм $\overrightarrow{OB}$ векторлары OAB яссылыгында ята. Билгеле инде, шушы ук яссылыкта $\overrightarrow{OA_1} = x \cdot \overrightarrow{OA}$ һәм $\overrightarrow{OB_1} = y \cdot \overrightarrow{OB}$ векторлары да ята, шулай булгач, аларның $\vec{c}$ векторына тигез булган суммасы — $\overrightarrow{OC} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB}$ векторы да бу яссылыкта ята. Шулай итеп, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ һәм $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ векторлары бер яссылыкта ята, ягъни $\vec{a}$, $\vec{b}$ һәм $\vec{c}$ векторлары компланар.



Рәс. 115

Кире раслама да дөрес: **әгәр $\vec{a}$, $\vec{b}$ һәм $\vec{c}$ векторлары компланар булса, ә $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары коллинеар булмаса, ул вакытта $\vec{c}$ векторын $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары буенча таркатырга** (ягъни (1) рәвешендә күрсәтергә) **мөмкин, өстәвенә таркату коэффициентлары** (ягъни (1) формуласындагы x һәм y саннары) **бертөрле генә билгеләнә.** Планиметрия курсыннан билгеле булган векторны коллинеар булмаган ике векторга таркату турындагы теоремадан файдаланып, бу расламаны мөстәкыйль рәвештә исбатлагыз.

44 Параллелепипед кагыйдәсе

Компланар булмаган өч векторны кушу өчен, параллелепипед кагыйдәсеннән файдаланырга мөмкин. Аны тасвирлап бирик. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — компланар булмаган векторлар булсын. Пространстводагы теләсә нинди O ноктасыннан $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ векторларын салабыз да, OA, OB һәм OC кисемтәләре кабыргалары булырлык итеп, параллелепипед төзибез (114 нче рәс. кара). Ул вакытта бу параллелепипедның

OD диагонале $\vec{a}$, $\vec{b}$ һәм $\vec{c}$ векторларының суммасын сурәтли: $\overrightarrow{OD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. Дөрестән дә, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{ED} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE}) + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

45 Векторны компланар булмаган өч вектор буенча таркату

Әгәр $\vec{p}$ векторы

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} \qquad (2)$$

рәвешендә күрсәтелгән булса (биредә x, y һәм z — ниндидер саннар), **$\vec{p}$ векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ һәм $\vec{c}$ векторлары буенча таркатылган**, диләр. x, y, z саннары **таркату коэффициентлары** дип атала.

Векторны компланар булмаган өч вектор буенча таркату турындагы теореманы исбатлыйк.

Теорема

Теләсә нинди векторны бирелгән өч компланар булмаган вектор буенча таркатырга мөмкин, өстәвенә таркату коэффициенты бертөрле генә билгеләнә.

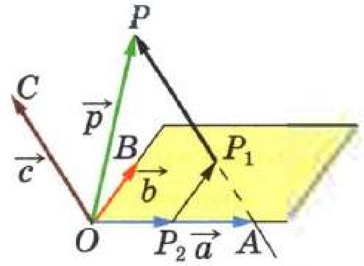
Исбатлау

$\vec{a}$, $\vec{b}$ һәм $\vec{c}$ бирелгән компланар булмаган векторлар булсын. Башта теләсә нинди $\vec{p}$ векторын (2) рәвешендә күрсәтергә мөмкин икәнен исбатларбыз.

Теләсә нинди O ноктасын билгеләп, бу ноктадан (рәс. 116):

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a},\ \overrightarrow{OB} = \vec{b},\ \overrightarrow{OC} = \vec{c},\ \overrightarrow{OP} = \vec{p} \qquad (3)$$

векторларын салабыз.



Рәс. 116

P ноктасы аша OC турысына параллель туры үткәреп, бу турының AOB яссылыгы белән кисешү ноктасын P_1 аша тамгалыйбыз (әгәр $P \in OC$ булса, P_1 ноктасын O ноктасы буларак алабыз). Аннары P_1 ноктасы аша OB турысына параллель туры үткәреп, бу турының OA турысы белән кисешү ноктасын P_2 аша тамгалыйбыз (әгәр $P_1 \in OB$ булса, P_2 урынына O ноктасын алабыз). Күппочмак кагыйдәсе буенча

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{P_2P_1} + \overrightarrow{P_1P}. \qquad (4)$$

$\overrightarrow{OP_2}$ һәм $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{P_2P_1}$ һәм $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{P_1P}$ һәм $\overrightarrow{OC}$ векторлары коллинеар, шуңа күрә $\overrightarrow{OP_2} = x \cdot \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{P_2P_1} = y \cdot \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{P_1P} = z \cdot \overrightarrow{OC}$ үтәлердәй x, y, z саннары бар. Бу аңлатмаларны (4) тигезлегенә куеп табабыз:

$$\overrightarrow{OP} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} + z \cdot \overrightarrow{OC}.$$

Моннан, (3) тигезлеген исәпкә алып, (2) тигезлегенә киләбез.

Хәзер (2) формуласындагы таркату коэффициентлары бертөрле генә билгеләнгәнен исбатлыйк $\vec{p}$ векторының (2) таркатмасы белән рәттән тагын икенче таркатмасы: $\vec{p} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}$ бар дип фараз итик. Бу тигезлекне (2) тигезлегеннән алып, векторлар белән гамәлләр үзлеген куллансак табабыз:

$$\vec{0} = (x - x_1)\vec{a} + (y - y_1)\vec{b} + (z - z_1)\vec{c}.$$

Бу тигезлек $x - x_1 = 0$, $y - y_1 = 0$, $z - z_1 = 0$ булганда һәм бары тик шул вакытта гына үтәлә. Дөрестән дә, $z - z_1 \neq 0$ дип фараз итсәк, бу тигезлектән табабыз:

$$\vec{c} = -\frac{x - x_1}{z - z_1}\vec{a} - \frac{y - y_1}{z - z_1}\vec{b}.$$

Моннан $\vec{a}$, $\vec{b}$ һәм $\vec{c}$ векторларының компланар икәнлеге килеп чыга. Ләкин бу — теореманың шартына каршы килә. Димәк, безнең фаразыбыз дөрес түгел һәм $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$. Шулай булгач, (2) таркату коэффициентлары бертөрле генә билгеләнә. Теорема исбатланды.

$\vec{p}$, $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары компланар булса, ул вакытта $z = 0$ (ни өчен икәнен аңлатыгыз), һәм $\vec{p}$ векторы $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторларына таркатылган булып чыга.

Сораулар һәм мәсьәләләр

355 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеды бирелгән. Түбәндәге өч векторның кайсылары компланар: а) $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$; б) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$; в) $\overrightarrow{B_1B}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DD_1}$; г) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$?

356 E, F нокталары — $ABCD$ тетраэдрында AC һәм BD кабыргаларының урталары. $2\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}$ икәнен исбатлагыз. $\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{BA}$ һәм $\overrightarrow{DC}$ векторлары компланармы?

357 $ABCD$ һәм $AB_1C_1D_1$ параллелограммнары бирелгән. $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ һәм $\overrightarrow{DD_1}$ векторларының компланар икәнен исбатлагыз.

358 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеды бирелгән. а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$; б) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD_1}$; в) $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{C_1B_1} + \overrightarrow{BB_1}$; г) $\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{A_1D_1} + \overrightarrow{AB}$; д) $\overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{BC}$ векторларының суммасына тигез булган һәм башлангычы белән ахыры параллелепипед түбәләрендә яткан векторны атагыз.

359 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеды бирелгән. а) $\overrightarrow{BD_1}$ векторын $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ һәм $\overrightarrow{BB_1}$ векторлары буенча таркатыгыз; б) $\overrightarrow{B_1D_1}$ векторын $\overrightarrow{A_1A}$, $\overrightarrow{A_1B}$ һәм $\overrightarrow{A_1D_1}$ векторлары буенча таркатыгыз.

360 Кабыргасы a га тигез булган $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының A_1, B һәм D түбәләрендә ноктадай q корылмалары урнаштырылган. а) A һәм C_1 нокталарында бу корылмалар тудырган нәтиҗә көчәнешлелекне* $\overrightarrow{AC_1}$ векторы аша күрсәтегез; б) C, B_1 нокталарында, $A_1B_1C_1D_1$ кырының үзәгендә һәм куб үзәгендә нәтиҗә көчәнешлелекнең абсолют зурлыгын табыгыз.

361 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедының диагональләре O ноктасында кисешә. $\overrightarrow{CD}$ һәм $\overrightarrow{D_1O}$ векторларын $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AB}$ һәм $\overrightarrow{AD}$ векторлары буенча таркатыгыз.

362 K ноктасы — $ABCD$ тетраэдрында BC кабыргасының уртасы. $\overrightarrow{DK}$ векторын $\overrightarrow{DA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ һәм $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ векторлары буенча таркатыгыз.

Чишү

K ноктасы BC кисемтәсенең уртасы булганлыктан, $\overrightarrow{DK}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}\right)$. Ләкин $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{c}$. Шуңа күрә

$$\overrightarrow{DK}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{a}+\vec{c})=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}.$$

363 Түбәсе O булган пирамиданың нигезендә диагональләре M ноктасында кисешүче $ABCD$ параллелограммы ята. $\overrightarrow{OD}$ һәм $\overrightarrow{OM}$ векторларын $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ һәм $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ векторлары буенча таркатыгыз.

364 K ноктасы — $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында B_1C_1 кабыргасының уртасы. $\overrightarrow{AK}$ векторын $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$ векторлары буенча таркатыгыз һәм кубның кабыргасы m га тигез булса, бу векторның озынлыгын табыгыз.

365 $ABCD$ параллелограммыннан читтә O ноктасы алынган. M ноктасы — AB ның уртасы, ә K ноктасы — MD ның уртасы. $\overrightarrow{OM}$ һәм $\overrightarrow{OK}$ векторларын $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ векторлары буенча таркатыгыз.

366 M — ABC өчпочмагы медианаларының кисешү ноктасы, O — пространствода ирекле рәвештә алынган нокта булса,

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right) \qquad (5)$$

икәнен исбатлагыз.

---

* Ноктадай q корылмасы O ноктасында урнашса, M ноктасында ул тудырган электр кырының көчәнешлелеге $\vec{E}=\frac{kq}{OM^3}\times\overrightarrow{OM}$ формуласы белән аңлатыла, биредә k коэффициенты берәмлекләр системасын сайлап алуга бәйле.

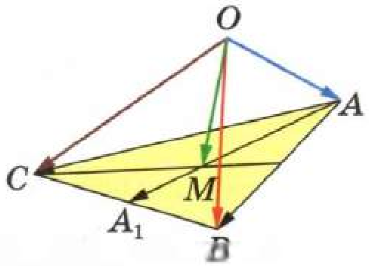
Чишү

Өчпочмак медианаларының кисешү ноктасы турындагы теорема буенча $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MA_1}$, биредә AA_1 — ABC өчпочмагының медианасы (рәс. 117). 349 нчы мәсьәлә буенча

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OA_1}}{1+2} = \frac{\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OA_1}}{3}.$$

Ләкин $\overrightarrow{OA_1} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$ (ни өчен икәнен аңлатыгыз), шуңа күрә

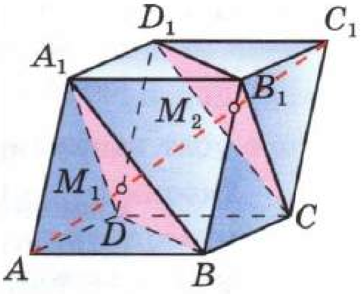
$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}.$$



Рәс. 117

367 $ABCD$ тетраэдрында ABC кырының AA_1 медианасы K ноктасы белән $AK : KA_1 = 3 : 7$ чагыштырмасында бүленә. $\overrightarrow{DK}$ векторын $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ векторлары буенча таркатыгыз.

368 M һәм N нокталары — $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедында AB һәм A_1D_1 кабыргаларының урталары. Мөмкин булса, а) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{CM}$; в) $\overrightarrow{C_1N}$; г) $\overrightarrow{AC_1}$; д) $\overrightarrow{A_1N}$; е) $\overrightarrow{AN}$; ж) $\overrightarrow{MD}$ векторын $\overrightarrow{AB}$ һәм $\overrightarrow{AD}$ векторлары буенча таркатыгыз.



Рәс. 118

369 $OABC$ тетраэдрында ABC кырының медианалары M ноктасында кисешәләр. $\overrightarrow{OA}$ векторын $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OM}$ векторлары буенча таркатыгыз.

370 Төзек $ABCD$ тетраэдрында AM һәм DN биеклекләре K ноктасында кисешәләр. а) $\overrightarrow{DN}$; б) $\overrightarrow{DK}$; в) $\overrightarrow{AM}$; г) $\overrightarrow{MK}$ векторын $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$ векторлары буенча таркатыгыз.

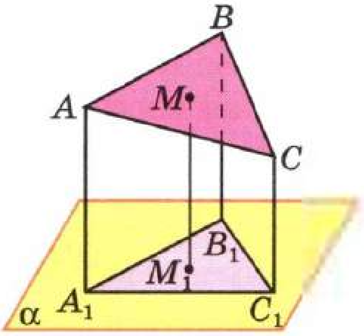
371 $ABCD$ тетраэдрында BCD кырының медианалары O ноктасында кисешәләр. AO кисемтәсенең озынлыгы уртак түбәсе A булган кабыргалары суммасының өчтән береннән кечерәк икәнен исбатлагыз.

372 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедының AC_1 диагонале A_1BD һәм CB_1D_1 өчпочмаклары медианаларының кисешү нокталары аша үткәнен һәм бу нокталар белән өч тигез кисемтәгә бүленгәнен исбатлагыз (рәс. 118).

Чишү

A_1BD өчпочмагы медианаларының кисешү ноктасын M_1 аша тамгалыйк. AA_1BD тетраэдрына (5) формуласын кулланып табабыз: $\overrightarrow{AM_1} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)$. Параллелепипед кагыйдәсе буенча $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC_1}$, шуңа күрә $\overrightarrow{AM_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}$. Моннан M_1 ноктасының AC_1 диагоналендә ятканлыгы һәм $AM_1 = \frac{1}{3}AC_1$ икәнлеге килеп чыга.

Нәкъ шулай ук CB_1D_1 өчпочмагы медианаларының кисешү ноктасы M_2 нең AC_1 диагоналендә ятканын һәм $C_1M_2=\frac{1}{3}AC_1$ икәнен исбат итәргә мөмкин. $AM_1=\frac{1}{3}AC_1$ һәм $C_1M_2=\frac{1}{3}AC_1$ тигезлегеннән M_1 һәм M_2 нокталары параллелепипедның AC_1 диагонален өч тигез кисәккә: AM_1, M_1M_2 һәм M_2C_1 кисемтәләренә бүлгәнлеге килеп чыга.



Рәс. 119

373 A_1, B_1, C_1 һәм M_1 нокталары — ABC өчпочмагының түбәләреннән һәм шул ук өчпочмакның медианалары кисешү ноктасы M нан α яссылыгына үткәрелгән перпендикулярларның нигезләре (рәс. 119). $MM_1=\frac{1}{3}(AA_1+BB_1+CC_1)$ икәнен исбатлагыз. ABC өчпочмагының кайсыдыр яклары α яссылыгы белән кисешсәләр, тигезлек дөрес буламы?

374 AB һәм CD кисемтәләре бер яссылыкта ятмыйлар, M һәм N нокталары — бу кисемтәләрнең урталары.

$$MN<\frac{1}{2}(AC+BD)$$

икәнен исбатлагыз.

375 $ABCD$ тетраэдрында K һәм M нокталары — AB һәм CD кабыргаларының урталары, KC, KD, MA һәм MB кисемтәләренең урталары ниндидер параллелограммның түбәләре булганын исбатлагыз.

IV бүлеккә сораулар

1 Раслама дөресме: а) капма-каршы юнәлгән теләсә нинди ике вектор коллинеар; б) теләсә нинди коллинеар ике вектор бердәй юнәлешле; в) теләсә нинди тигез ике вектор коллинеар; г) бердәй юнәлешле теләсә нинди ике вектор тигез; д) әгәр $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$, $\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{c}$ булса, ул вакытта $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{c}$; е) $\vec{a}$ һәм $\vec{c}$ коллинеар булмаган, $\vec{b}$ һәм $\vec{c}$ коллинеар булмаган, ә $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ коллинеар булган $\vec{a}$, $\vec{b}$ һәм $\vec{c}$ векторлары бармы?

2 A һәм C нокталары O ноктасына карата симметрик һәм $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$. B һәм D нокталары O ноктасына карата симметрикмы?

3 A һәм C нокталары a турысына карата симметрик һәм $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$. B һәм D нокталары: а) a турысына карата симметрик булуы; б) a турысына карата симметрик булмавы мөмкинме?

4 A һәм C нокталары, шулай ук B һәм D нокталары α яссылыгына карата симметрик. $\overrightarrow{AB}$ һәм $\overrightarrow{CD}$ векторларының: а) тигез булуы; б) тигез булмавы мөмкинме?

5 $\vec{a}$ һәм $\vec{a}+\vec{b}$ векторларының коллинеар икәнлеге билгеле. $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары коллинеармы?

6 Ике вектор суммасының озынлыгы һәр кушылучының озынлыгыннан кечерәк булуы мөмкинме?

7 Нуль булмаган берничә вектор суммасының озынлыгы бу векторларның озынлыклары суммасына тигез булуы мөмкинме?

8 Нуль булмаган ике вектор аермасының озынлыгы бу векторларның озынлыклары суммасына тигез булуы мөмкинме?

9 Нуль булмаган ике векторның аермасы озынлыгы бу векторларның аермасына тигез булуы мөмкинме?

10 Нуль булмаган ике векторның суммасы озынлыгы бу векторларның аермасы озынлыгына тигез булуы мөмкинме?

11 а) $\vec{b}\uparrow\uparrow\vec{a}$ һәм $|\vec{b}|=|\vec{a}|$; б) $\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{a}$ һәм $|\vec{b}|=3|\vec{a}|$; в) $\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{a}$ һәм $|\vec{b}|=k|\vec{a}|$; г) $\vec{b}=\vec{0}$ шартын канәгатьләндерүче $\vec{b}$ векторын табу өчен, нуль булмаган $\vec{a}$ векторын нинди санга тапкырларга кирәк?

12 $\overrightarrow{AB}=k\cdot\overrightarrow{CD}$, шуның белән бергә, A, B һәм C нокталарының бер турыда ятмавы билгеле. k ның нинди кыйммәтендә AC һәм BD турылары: а) параллель; б) кисешәләр? AC һәм BD ның чалышма турылар булуы мөмкинме?

13 Векторлар компланармы: а) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $2\vec{a}$, $3\vec{b}$; б) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$?

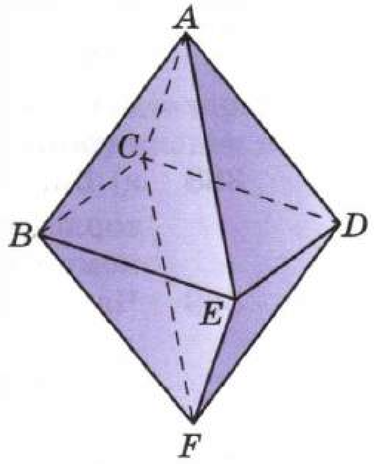
14 $\vec{a}$, $\vec{b}$ һәм $\vec{c}$ векторларының компланар икәне билгеле. а) $\vec{a}$, $2\vec{b}$, $3\vec{c}$; б) $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}+2\vec{c}$, $2\vec{b}-3\vec{c}$ векторлары компланармы?

15 A, B һәм C нокталары әйләнәдә яталар, ә O ноктасы бу әйләнә яссылыгында ятмый. $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ һәм $\overrightarrow{OC}$ векторларының компланар булуы мөмкинме?

Өстәмә мәсьәләләр

376 $MNPQM_1N_1P_1Q_1$ параллелепипеды бирелгән. а) $\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{M_1Q_1}=\overrightarrow{N_1P_1}+\overrightarrow{NP}$; б) $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{NP_1}=\overrightarrow{NQ_1}$; в) $\overrightarrow{Q_1P_1}+\overrightarrow{QQ_1}=\overrightarrow{QP_1}$ икәнен исбатлагыз.

377 120 нче рәсемдә төзек октаэдр сурәтләнгән. а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{DB}$; б) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{EC}$; в) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AF}$ икәнен исбатлагыз.



Рәс. 120

378 $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторларының аермасы $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$ формуласы белән аңлатылганын исбатлагыз.

379 $ABCD$ тетраэдры бирелгән. Векторларның суммасын табыгыз: а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}$; б) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DC}$; в) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}$.

380 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеды бирелгән. Векторларның суммасын табыгыз: а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{CB_1}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{A_1A}$; в) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}$.

381 ABC, $A_1B_1C_1$ өчпочмаклары һәм пространствоның O һәм P нокталары бирелгән. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC_1}$ икәне билгеле. $A_1B_1C_1$ өчпочмагының яклары ABC өчпочмагының якларына тиңдәшле рәвештә тигез һәм параллель икәнен исбатлагыз.

382 k ның нинди кыйммәтләре өчен $\vec{a}=k\vec{b}$ (биредә $\vec{b}\neq\vec{0}$) тигезлегендә $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары: а) коллинеар; б) бердәй юнәлешле; в) капма-каршы юнәлешле; г) капма-каршы булалар?

383 k һәм l саннары бер-берсенә тигез түгел. Әгәр $\vec{a}+k\vec{b}$ һәм $\vec{a}+l\vec{b}$ коллинеар булмаса: а) $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары коллинеар түгел; б) $\vec{a}+k_1\vec{b}$ һәм $\vec{a}+l_1\vec{b}$ векторлары тигез булмаган теләсә нинди k_1һәм l_1 саннары өчен коллинеар түгел икәнен исбатлагыз.

384 A_1, B_1 һәм C_1 нокталары — ABC өчпочмагында BC, AC һәм AB якларының урталары, O ноктасы — пространствода ирекле рәвештә алынган нокта. $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ икәнен исбатлагыз.

385 $ABCD$ дүртпочмагында капма-каршы якларының урталарын тоташтыручы кисемтәләр M ноктасында кисешәләр. O ноктасы — пространствода ирекле рәвештә алынган нокта. $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$ икәнен исбатлагыз.

386 $ABCD$ параллелограммының диагональләре O ноктасында кисешәләр. Пространствоның теләсә нинди M ноктасы өчен $\overrightarrow{MO}<\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right)$ тигезсезлеге дөрес икәнен исбатлагыз.

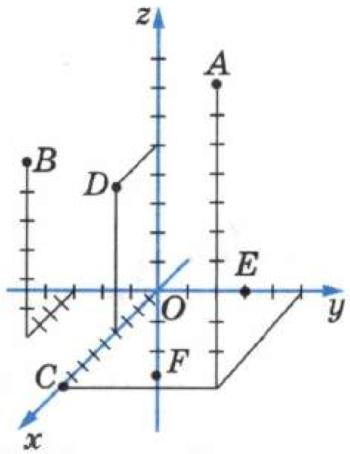
387 M, N һәм P нокталары бер турыда ята, ә O ноктасы бу турыда ятмый. а) $\overrightarrow{NP}=2\overrightarrow{MN}$; б) $\overrightarrow{MP}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{PN}$; в) $\overrightarrow{MP}=k\cdot\overrightarrow{MN}$ (биредә k — бирелгән сан) булса, $\overrightarrow{OP}$ векторын $\overrightarrow{OM}$ һәм $\overrightarrow{ON}$ векторлары аша күрсәтегез.

388 а) Бирелгән векторларның берсе — нуль-вектор; б) бирелгән векторларның икесе коллинеар булса, $\vec{p}$, $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторларының компланар икәнен исбатлагыз.

389 Чалышма ике турыда өчәр нокта билгеләнгән: A_1, A_2, A_3 һәм B_1, B_2, B_3, өстәвенә $\overrightarrow{A_1A_2}=k\cdot\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{B_1B_2}=k\cdot\overrightarrow{B_1B_3}$. A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 турыларының нindидер яссылыкка параллель икәнен исбатлагыз.

390 $AB=AD=a$, $AA_1=2a$ булган турыпочмаклы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеды бирелгән. B_1, D_1 түбәләрендә — q корылмасы, ә A түбәсендә $2q$ корылмасы урнаштырылган. а) A_1 ноктасында; б) C ноктасында; в) $A_1B_1C_1D_1$ кыры үзәгендә; г) $ABCD$ кыры үзә-

лыйбыз (рәс. 122). M ноктасының беренче координатасы (ул **абсцисса** дип атала һәм, гадәттә, x хәрефе белән тамгалана) болай табыла: $x = OM_1$, әгәр M_1 уңай ярымкүчәр ноктасы булса; $x = -OM_1$, әгәр M_1 — тискәре ярымкүчәр ноктасы булса; $x = 0$, әгәр M_1 ноктасы O ноктасы белән тәңгәл килсә. M ноктасының икенче координатасы y (**ордината**) M_2 ноктасы ярдәмендә аналогик рәвештә табыла, ә M ноктасының өченче координатасы z (**аппликата**) M_3 ноктасы ярдәмендә табыла. M ноктасының координаталары нокта тамгаланышыннан соң җәя эчендә языла: $M(x; y; z)$, шуның белән бергә, беренче булып — абсцисса, икенче — ордината, өченче аппликата күрсәтелә. 123 нче рәсемдә $A(9; 5; 10)$, $B(4; -3; 6)$, $C(9; 0; 0)$, $D(4; 0; 5)$, $E(0; 3; 0)$, $F(0; 0; -3)$ ноктaлары сурәтләнгән.



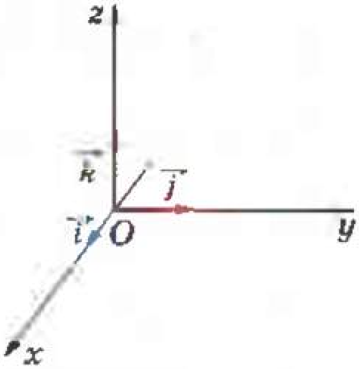
Рәс. 123

Әгәр $M(x; y; z)$ ноктасы координаталар яссылыгында яки координаталар күчәрендә ятса, аның кайбер координаталары нульгә тигез була. Әйтик, $M \in Oxy$ булса, M ноктасының аппликатасы нульгә тигез: $z = 0$. Аналогия буенча $M \in Oxz$ булса, $y = 0$, ә $M \in Oyz$ булса, $x = 0$. Әгәр $M \in Ox$ булса, ул вакытта M ноктасының ординатасы һәм аппликатасы нульгә тигез: $y = 0$ һәм $z = 0$ (мәсәлән, 123 нче рәсемдә C ноктасының). Әгәр $M \in Oy$ булса, ул вакытта $x = 0$ һәм $z = 0$; әгәр $M \in Oz$ булса, ул вакытта $x = 0$ һәм $y = 0$. Координаталар башлангычының өч координатасы да нульгә тигез: $O(0; 0; 0)$.

47 Векторның координаталары

Пространствода турыпочмаклы $Oxyz$ координаталар системасын бирик. Уңай ярымкүчәрләрнең һәркайсында координаталар башлангычыннан **берәмлек вектор**, ягъни озынлыгы берәмлеккә тигез булган вектор салабыз. Абсциссалар күчәренең берәмлек векторын $\vec{i}$ аша, ординаталар күчәренең берәмлек векторын $\vec{j}$ аша, аппликаталар күчәренең берәмлек векторы $\vec{k}$ аша тамгалыйк (рәс. 124). $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ векторларын **координаталар векторлары** дип атыйбыз. Бу векторларның компланар түгеллеге ачык аңлашыла. Шуңа күрә **теләсә нинди $\vec{a}$ векторын координаталар векторлары буенча таркатырга**, ягъни

$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ **рәвешендә күрсәтергә мөмкин, шул ук вакытта таркату коэффициентлары x, y, z бертөрле генә билгеләнә.**



Рәс. 124

$\vec{a}$ векторының координаталар векторлары буенча таркатмасындагы x, y һәм z коэффициентлары

гендә электр кырының нәтиҗә көчәнешлелегенең абсолют зурлыгын табыгыз.

391 $ABCD$ тетраэдрында K ноктасы — BCD кырының BB_1 медианасының уртасы. $\overrightarrow{AK}$ векторын $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$ векторлары буенча таркатыгыз.

392 Компланар булмаган $\vec{p}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{q}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{r}=\overrightarrow{AA_1}$ векторларында $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеды төзелгән. Бу параллелепипедның диагональләреннән барлыкка килгән векторларны $\vec{p}$, $\vec{q}$ һәм $\vec{r}$ векторлары буенча таркатыгыз.

393 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедында K ноктасы — CC_1 кабыргасының уртасы. а) $\overrightarrow{AK}$ векторын $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$ векторлары буенча; б) $\overrightarrow{DA_1}$ векторын $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{CD_1}$ векторлары буенча таркатыгыз.

394 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедында DCC_1D_1 кырының диагональләре M ноктасында кисешә. $\overrightarrow{AM}$ векторын $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ һәм $\overrightarrow{AA_1}$ векторлары буенча таркатыгыз.

395 ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмакларында медианаларының кисешү нокталары тәңгәл килсә, ул вакытта AA_1, BB_1 һәм CC_1 турыларының ниндидер яссылыкка параллель икәнен исбатлагыз.

396 $ABCD$ тетраэдрында M ноктасы — BC кабыргасының уртасы. $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DB}$ һәм $\overrightarrow{DM}$ векторларын $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ векторлары аша күрсәтегез.

397 $ABCD$ тетраэдрында M һәм N нокталары — тиңдәшле рәвештә ADB һәм BDC кырлары медианаларының кисешү нокталары. $MN \parallel AC$ икәнен исбатлагыз һәм бу кисемтәләрнең озынлыклары чагыштырмасын табыгыз.

398 ABC, $A_1B_1C_1$ һәм $A_2B_2C_2$ өчпочмаклары A, B, C нокталары тиңдәшле рәвештә A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 кисемтәләренең урталары булырлык итеп урнашкан. ABC, $A_1B_1C_1$ һәм $A_2B_2C_2$ өчпочмаклары медианаларының кисешү нокталары бер турыда ятканын исбатлагыз.

399 Тетраэдрда ян кырлары медианаларының кисешү нокталары түбәләре булган өчпочмак тетраэдрның нигезенә охшаш икәнен исбатлагыз.

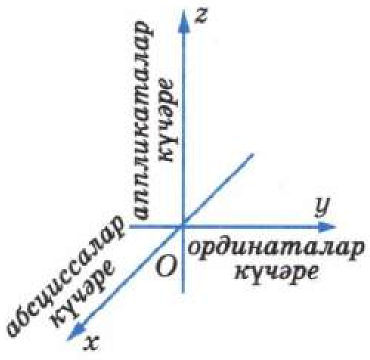
V бүлек

Пространствода координаталар методы. Хәрәкәтләр

§ 1 Ноктаның координаталары һәм векторның координаталары

46 Пространствода турыпочмаклы координаталар системасы

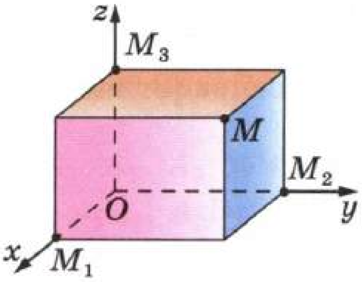
Әгәр пространство ноктасы аша, пар-пар перпендикуляр итеп, өч туры үткәрелсә, аларның һәркайсының юнәлеше (ул ук белән күрсәтелә) һәм кисемтәләрне* үлчәү берәмлеге сайлап алынган булса, пространствода **турыпочмаклы координаталар системасы** бирелгән, диләр (рәс. 121). Юнәлеше сайлап алынган турылар — **координаталар күчәрләре**, ә аларның уртак ноктасы **координаталар башлангычы** дип атала. Гадәттә, ул O хәрефе белән тамгалана. Координаталар күчәрләре исә Ox, Oy, Oz дип тамгалана һәм абсциссалар күчәре, ординаталар күчәре, аппликаталар күчәре дип исемләнә. Координаталар системасы тулаем $Oxyz$ дип тамгалана. Координаталар күчәрләре Ox һәм Oy, Oy һәм Oz, Oz һәм Ox аша үтүче өч яссылык **координаталар яссылыклары** дип атала. Тиңдәшле рәвештә алар болай тамгалана: Oxy, Oyz, Ozx.



Рәс. 121

O ноктасы һәр координаталар күчәрен ике нурга бүлә. Юнәлеше күчәр юнәлеше белән туры килгән нур **уңай ярымкүчәр** дип, ә икенче нур **тискәре ярымкүчәр** дип атала.

Турыпочмаклы координаталар системасында пространствоның һәр M ноктасына аның **координаталары** дип аталган өч сан тиңдәш була. Алар яссылыктагы нокталарның координаталарына аналогия буенча билгеләнә. M ноктасы аша, координаталар күчәрләренә перпендикуляр итеп, өч яссылык үткәрәбез һәм бу яссылыкларның абсциссалар, ординаталар һәм аппликаталар күчәрләре белән кисешү нокталарын тиңдәшле рәвештә M_1, M_2 һәм M_3 нокталары аша тамга-

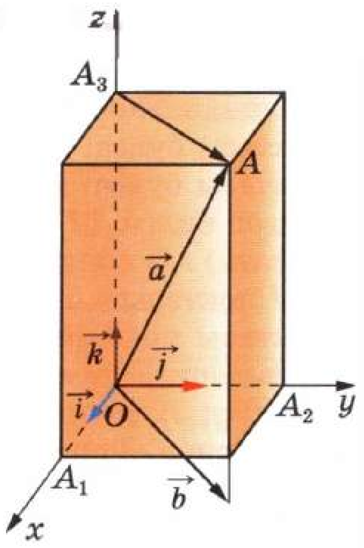


Рәс. 122

---

* Исегезгә төшерәбез: кисемтәләрне үлчәү өчен сайлап алынган берәмлекләрдә һәр кисемтәнең озынлыгы уңай сан белән аңлатыла. Бу бүлектә кисемтәнең озынлыгы дигәннән шул санны күз алдында тотабыз.

$\vec{a}$ векторының **координаталар системасындагы координаталары** дип атала. $\vec{a}$ векторының координаталарын вектор тамгаланышыннан соң фигуралы җәяләр эчендә язарбыз: $\vec{a}\{x;\ y;\ z\}$. 125 нче рәсемдә түбәндәге үлчәнешләргә ия булган турыпочмаклы параллелепипед сурәтләнгән: $OA_1 = 2$, $OA_2 = 2$, $OA_3 = 4$. Бу рәсемдә сурәтләнгән векторларның координаталары түбәндәгечә: $\vec{a}\{2;\ 2;\ 4\}$, $\vec{b}\{2;\ 2;\ -1\}$, $\overrightarrow{A_3A}\{2;\ 2;\ 0\}$, $\vec{i}\{1;\ 0;\ 0\}$, $\vec{j}\{0;\ 1;\ 0\}$, $\vec{k}\{0;\ 0;\ 1\}$.



Рәс. 125

Нуль-векторны $\vec{0} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$ рәвешендә күрсәтергә мөмкин булганга күрә, нуль-векторның барлык координаталары да нульгә тигез. Аннары **тигез векторларның координаталары тиңдәшле рәвештә тигез,** ягъни әгәр $\vec{a}\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ һәм $\vec{b}\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$ векторлары тигез булса, ул вакытта $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$ (ни өчен икәнен аңлатыгыз).

Бирелгән векторларның координаталары буенча аларның суммасының, аермасының, векторның санга тапкырчыгышының координаталарын табарга мөмкинлек бирүче кагыйдәләрне тикшерик.

1°. Ике яки аннан да күбрәк векторлар суммасының һәр координатасы бу векторларның тиңдәшле координаталарының суммасына тигез. Икенче сүзләр белән әйткәндә, $\vec{a}\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ һәм $\vec{b}\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$ бирелгән векторлар булса, $\vec{a} + \vec{b}$ векторы $\{x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2\}$ координаталарына ия.

2°. Ике вектор аермасының һәр координатасы бу векторларның тиңдәшле координаталарының аермасына тигез. Икенче сүзләр белән әйткәндә, $\vec{a}\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ һәм $\vec{b}\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$ бирелгән векторлар булса, ул вакытта $\vec{a} - \vec{b}$ векторы $\{x_1 - x_2;\ y_1 - y_2;\ z_1 - z_2\}$ координаталарына ия.

3°. Векторның санга тапкырчыгышының һәр координатасы векторның тиңдәшле координатасын шул санга тапкырлаганга тигез. Икенче сүзләр белән әйткәндә, $\vec{a}\{x;\ y;\ z\}$ — бирелгән вектор, α — бирелгән сан булса, ул вакытта $\alpha\vec{a}$ векторы $\{\alpha x;\ \alpha y;\ \alpha z\}$ координаталарына ия.

1°—3° расламалары яссылыктагы векторлар өчен исбатлаган кебек үк исбатлана.

Әле карап киткән кагыйдәләр координаталары билгеле булган бирелгән векторларның алгебраик суммасы рәвешендә күрсәтелгән теләсә нинди векторның координаталарын табарга мөмкинлек бирә. Мисал карыйк.

Мәсьәлә

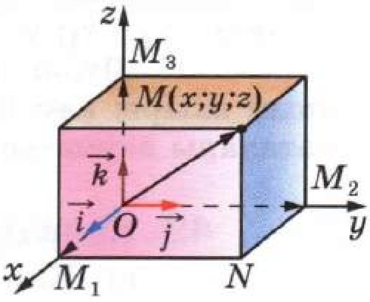
$\vec{a}\{1;\ -2;\ 0\}$, $\vec{b}\{0;\ 3;\ -6\}$, $\vec{c}\{-2;\ 3;\ 1\}$ булса, $\vec{p} = 2\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \vec{c}$ векторының координаталарын табарга.

Чишү

3° кагыйдәсе буенча $2\vec{a}$ векторы $\{2;\ -4;\ 0\}$ координаталарына, ә $\left(-\frac{1}{3}\vec{b}\right)$ векторы $\{0;\ -1;\ 2\}$ координаталарына ия. $\vec{p} = (2\vec{a}) + \left(-\frac{1}{3}\vec{b}\right) + \vec{c}$ булгач, аның $\{x;\ y;\ z\}$ координаталарын 1° кагыйдәсе буенча исәпләп чыгарырга мөмкин: $x = 2 + 0 - 2 = 0$, $y = -4 - 1 + 3 = -2$, $z = 0 + 2 + 1 = 3$. Шулай итеп, $\vec{p}$ векторы $\{0;\ -2;\ 3\}$ координаталарына ия.

48 Вектор координаталары белән нокта координаталары арасындагы бәйләнеш

Ахыры — бирелгән нокта белән, ә башлангычы координаталар башлангычы белән тәңгәл килгән вектор бирелгән ноктаның **радиус-векторы** дип атала. **Теләсә нинди ноктаның координаталары аның радиус-векторының тиңдәшле координаталарына тигез** икәнен исбатлыйк.



Рәс. 126

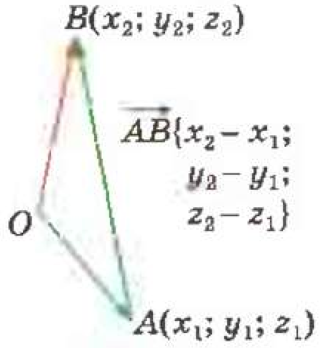
Бирелгән M ноктасының координаталарын $\{x;\ y;\ z\}$ аша тамгалыйбыз. M_1, M_2, M_3 — бирелгән M ноктасы аша бу күчәрләргә перпендикуляр үтүче яссылыкларның координаталар күчәрләре белән кисешү нокталары булсын (рәс. 126). Ул вакытта

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}. \qquad (1)$$

$\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$ икәнен исбатлыйк. Дөрестән дә, әгәр M_1 ноктасы, 126 нчы рәсемдәгечә, абсциссаларның уңай ярымкүчәрендә ятса, ул вакытта $x = OM_1$, ә $\overrightarrow{OM_1}$ һәм $\vec{i}$ векторлары бердәй юнәлешле. Шуңа күрә $\overrightarrow{OM_1} = OM_1 \cdot \vec{i} = x\vec{i}$. Әгәр M_1 ноктасы абсциссаларның тискәре ярымкүчәрендә ятса, ул вакытта $x = -OM_1$, ә $\overrightarrow{OM_1}$ һәм $\vec{i}$ векторлары капма-каршы юнәлгән. Шуңа күрә $\overrightarrow{OM_1} = -OM_1 \cdot \vec{i} = x\vec{i}$. Ниһаять, M_1 ноктасы O ноктасы белән тәңгәл килсә, ул вакытта $x = 0$, $\overrightarrow{OM_1} = \vec{0}$. Шуңа күрә $x\vec{i} = \vec{0}$ һәм яңадан $\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$ тигезлеге дөрес. Шул рәвешле, теләсә нинди очракта $\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$. $\overrightarrow{OM_2} = y\vec{j}$, $\overrightarrow{OM_3} = z\vec{k}$ икәнлеге шушыңа охшаш рәвештә исбат ителә.

Бу аңлатмаларны (1) тигезлегенә куеп табабыз: $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Моннан $\overrightarrow{OM}$ векторының координаталары $\{x;\ y;\ z\}$ ка тигез, ягъни M ноктасының координаталары аның $\overrightarrow{OM}$ радиус-векторының тиңдәшле координаталарына тигез икәнлеге килеп чыга, шуны исбатларга кирәк иде дә.



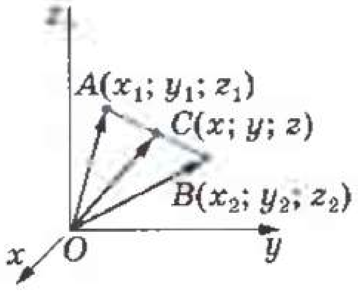
Рәс. 127

Исбатланган расламадан файдаланып, $\overrightarrow{AB}$ векторының координаталарын аның башлангычы A һәм ахыры B координаталары аша күрсәтик. A ноктасының координаталары $(x_1;\ y_1;\ z_1)$, B ноктасының координаталары $(x_2;\ y_2;\ z_2)$ булсын. $\overrightarrow{AB}$ векторы $\overrightarrow{OB}$ һәм $\overrightarrow{OA}$ векторларының аермасына тигез (рәс. 127), шуңа күрә аның координаталары тиңдәшле рәвештә $\overrightarrow{OB}$ һәм $\overrightarrow{OA}$ векторларының координаталары аермасына тигез. Ләкин $\overrightarrow{OB}$ һәм $\overrightarrow{OA}$ векторларының координаталары B һәм A нокталарының тиңдәшле координаталары белән тәңгәл килә: $\overrightarrow{OB}\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$, $\overrightarrow{OA}\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$. Шуңа күрә $\overrightarrow{AB}$ векторы $\{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\}$ координаталарына ия.

Шулай итеп, **векторның һәр координатасы аның ахыры һәм башлангычының тиңдәшле координаталары аермасына тигез.**

49 Координаталар белән иң гади мәсьәләләр

а) **Кисемтә уртасының координаталары.** $Oxyz$ координаталар системасында координаталары $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ булган A ноктасы һәм координаталары $(x_2;\ y_2;\ z_2)$ булган B ноктасы билгелибез. AB кисемтәсенең уртасы C ның координаталары $(x;\ y;\ z)$ ны аның очларының координаталары аша күрсәтик (рәс. 128).



Рәс. 128

C ноктасы — AB кисемтәсенең уртасы булганлыктан,

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right). \qquad (2)$$

(Бу тигезлекнең дөреслеге планиметрия курсында исбатланды.)

$\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA}$ һәм $\overrightarrow{OB}$ векторларының координаталары C, A һәм B нокталарының тиңдәшле координаталарына тигез: $\overrightarrow{OC}\{x;\ y;\ z\}$, $\overrightarrow{OA}\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$, һәм $\overrightarrow{OB}\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$. (2) тигезлеген координаталарда язып табабыз:

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2),\ y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2),\ z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2).$$

Шул рәвешле, **кисемтә уртасының һәр координатасы аның очларының тиңдәшле координаталарының ярымсуммасына тигез.**

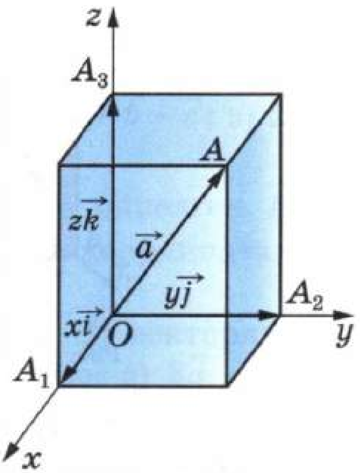
б) **Векторның озынлыгын аның координаталары аша исәпләп чыгару.** $\vec{a}\{x;\ y;\ z\}$ векторының озынлыгы

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (3)$$

формуласы буенча исәпләп чыгарылганын исбатлыйк.

Координаталар күчәрләрендә $\overrightarrow{OA_1} = x\vec{i}$, $\overrightarrow{OA_2} = y\vec{j}$, $\overrightarrow{OA_3} = z\vec{k}$ векторларын салыйк һәм $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \vec{a}$ векторын тикшерик (рәс. 129). $\overrightarrow{OA}$ векторының озынлыгы $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$ һәм $\overrightarrow{OA_3}$ векторларының озынлыклары аша түбәндәгечә күрсәтелә:

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{|\overrightarrow{OA_1}|^2 + |\overrightarrow{OA_2}|^2 + |\overrightarrow{OA_3}|^2}. \qquad (4)$$



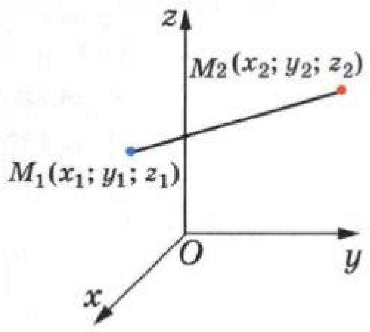
Рәс. 129

Дөрестән дә, әгәр A ноктасы координаталар яссылыкларында ятмаса (рәс. 129), турыпочмаклы параллелепипед диагоналенең үзлеге нигезендә (4) тигезлеге дөрес: $OA^2 = OA_1^2 + OA_2^2 + OA_3^2$. A ноктасы башкача урнашкан (A ноктасы координаталар яссылыгында яки координаталар күчәрендә яткан) барлык очракларда да (4) тигезлеге шулай ук дөрес (бу очракларны мөстәкыйль рәвештә тикшерегез).

$|\overrightarrow{OA_1}| = |x\vec{i}| = |x|$, $|\overrightarrow{OA_2}| = |y|$, $|\overrightarrow{OA_3}| = |z|$ һәм $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ булганга күрә, (4) тигезлегеннән (3) формуласын табабыз:

$$|\vec{a}| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2 + |z|^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

в) **Ике нокта арасындагы ераклык.** Теләсә нинди ике нокта: координаталары $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ булган M_1 ноктасын һәм координаталары $(x_2;\ y_2;\ z_2)$ булган M_2 ноктасын тикшерик (рәс. 130). M_1 һәм M_2 нокталары арасындагы ераклык d ны аларның координаталары аша күрсәтик.



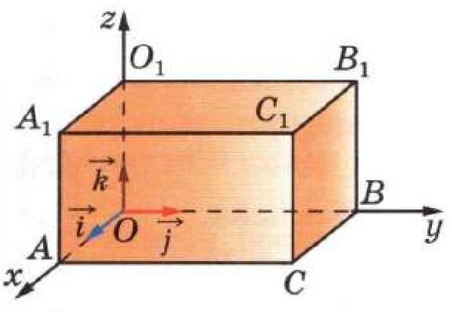
Рәс. 130

Шул максатта $\overrightarrow{M_1M_2}$ векторын карарбыз. Аның координаталары $\{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\}$ гә тигез. Шулай булгач, (3) формуласы буенча $|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$. Ләкин $d = |\overrightarrow{M_1M_2}|$.

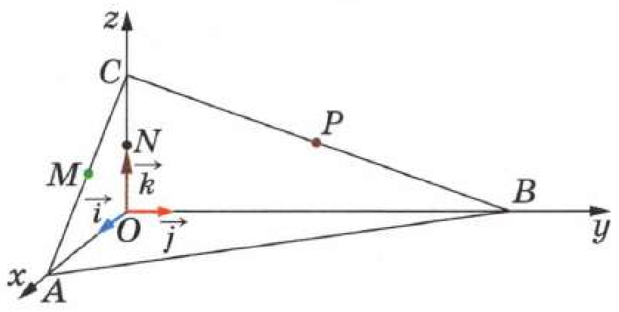
Шулай итеп, **$M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ һәм $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ нокталары арасындагы ераклык**

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

формуласы буенча исәпләнә.



Рәс. 131



Рәс. 132

Сораулар һәм мәсьәләләр

400 $A(3; -1; 0)$, $B(0; 0; -7)$, $C(2; 0; 0)$, $D(-4; 0; 3)$, $E(0; -1; 0)$, $F(1; 2; 3)$, $G(0; 5; -7)$, $H(-\sqrt{5}; \sqrt{3}; 0)$ нокталары бирелгән. Бу нокталарның кайсылары: а) абсциссалар күчәрендә; б) ординаталар күчәрендә; в) аппликаталар күчәрендә; г) Oxy яссылыгында; д) Oyz яссылыгында; е) Oxz яссылыгында ята?

401 $A(2; -3; 5)$, $B\left(3; -5; \frac{1}{2}\right)$ һәм $C\left(-\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$ нокталарының а) Oxz, Oxy һәм Oyz координаталар яссылыкларына; б) Ox, Oy һәм Oz координаталар күчәрләренә проекциясе нокталарының координаталарын табыгыз.

402 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының дүрт түбәсенең координаталары бирелгән: $A(0; 0; 0)$, $B(0; 0; 1)$, $D(0; 1; 0)$ һәм $A_1(1; 0; 0)$. Кубның калган түбәләренең координаталарын табыгыз.

403 Векторларның координаталарын языгыз: $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = -5\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{d} = \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{m} = \vec{k} - \vec{i}$, $\vec{n} = 0{,}7\vec{k}$.

404 $\vec{a}\{5; -1; 2\}$, $\vec{b}\{-3; -1; 0\}$, $\vec{c}\{0; -1; 0\}$, $\vec{d}\{0; 0; 0\}$ векторлары бирелгән. Бу векторларның координаталар векторлары $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ буенча таркатмасын языгыз.

405 131 нче рәсемдә $OA = 2$, $OB = 3$, $OO_1 = 2$ булган турыпочмаклы параллелепипед сурәтләнгән. $Oxyz$ координаталар системасында $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{QQ_1}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OC_1}$, $\overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{O_1C}$ векторларының координаталарын табыгыз.

406 Ике вектор суммасының (аермасының) һәр координатасы бу векторларның тиңдәшле координаталарының суммасына (аермасына) тигез икәнен исбатлагыз.

407 $\vec{a}\{3; -5; 2\}$, $\vec{b}\{0; 7; -1\}$, $\vec{c}\left\{\frac{2}{3}; 0; 0\right\}$ һәм $\vec{d}\{-2{,}7; 3{,}1; 0{,}5\}$ векторлары бирелгән. Векторларның координаталарын табыгыз: а) $\vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{a} + \vec{c}$; в) $\vec{b} + \vec{c}$; г) $\vec{d} + \vec{b}$; д) $\vec{d} + \vec{a}$; е) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; ж) $\vec{b} + \vec{a} + \vec{d}$; з) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$.

408 $OA = 4$, $OB = 9$, $OC = 2$, ә M, N һәм P нокталары — AC, OC һәм CB кисемтәләренең урталары булса, 132 нче рәсемдәге бирелгәннәр буенча $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OP}$ векторларының координаталарын табыгыз.

409 $\vec{a}\{5; -1; 1\}$, $\vec{b}\{-2; 1; 0\}$, $\vec{c}\{0; 0,2; 0\}$ һәм $\vec{d}\left\{-\frac{1}{3}; 2\frac{2}{5}; -\frac{1}{7}\right\}$ векторлары бирелгән. Векторларның координаталарын табыгыз: а) $\vec{a}-\vec{b}$; б) $\vec{b}-\vec{a}$; в) $\vec{a}-\vec{c}$; г) $\vec{d}-\vec{a}$; д) $\vec{c}-\vec{d}$; е) $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$; ж) $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$; з) $2\vec{a}$; и) $-3\vec{b}$; к) $-6\vec{c}$; л) $-\frac{1}{3}\vec{d}$; м) $0,2\vec{b}$.

410 $\vec{a}\{-1; 2; 0\}$, $\vec{b}\{0; -5; -2\}$ һәм $\vec{c}\{2; 1; -3\}$ векторлары бирелгән. $\vec{p} = 3\vec{b} - 2\vec{a} + \vec{c}$ һәм $\vec{q} = 3\vec{c} - 2\vec{b} + \vec{a}$ векторларының координаталарын табыгыз.

411 $\vec{a}\{-1; 1; 1\}$, $\vec{b}\{0; 2; -2\}$, $\vec{c}\{-3; 2; 0\}$ һәм $\vec{d}\{-2; 1; -2\}$ векторлары бирелгән. Векторларның координаталарын табыгыз: а) $3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$; б) $-\vec{a} + 2\vec{c} - \vec{d}$; в) $0,1\vec{a} + 3\vec{b} + 0,7\vec{c} - 5\vec{d}$; г) $(2\vec{a} + 3\vec{b}) - (\vec{a} - 2\vec{b}) + 2(\vec{a} - \vec{b})$.

412 Түбәндәге векторларга капма-каршы векторларның координаталарын табыгыз: $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, $\vec{a}\{2; 0; 0\}$, $\vec{b}\{-3; 5; -7\}$, $\vec{c}\{-0,3; 0; 1,75\}$.

413 Векторлар коллинеармы: а) $\vec{a}\{3; 6; 8\}$ һәм $\vec{b}\{6; 12; 16\}$; б) $\vec{c}\{1; -1; 3\}$ һәм $\vec{d}\{2; 3; 15\}$; в) $\vec{i}\{1; 0; 0\}$ һәм $\vec{j}\{0; 1; 0\}$; г) $\vec{m}\{0; 0; 0\}$ һәм $\vec{n}\{5; 7; -3\}$; д) $\vec{p}\left\{\frac{1}{3}; -1; 5\right\}$ һәм $\vec{q}\{-1; -3; -15\}$?

Чишү

а) $\vec{a}\{3; 6; 8\}$ векторының координаталары $\vec{b}\{6; 12; 16\}$ векторының координаталарына пропорциональ: $\frac{3}{6} = \frac{6}{12} = \frac{8}{16} = k$, биредә $k = \frac{1}{2}$. Шуңа күрә $\vec{a} = k\vec{b}$, димәк, $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары коллинеар;

б) $\vec{c}\{1; -1; 3\}$ векторының координаталары $\vec{d}\{2; 3; 15\}$ векторының координаталарына пропорциональ түгел, мәсәлән: $\frac{1}{2} \neq -\frac{1}{3}$. Шуңа күрә $\vec{c}$ һәм $\vec{d}$ векторлары коллинеар түгел. Дөрестән дә, $\vec{c}$ һәм $\vec{d}$ векторлары коллинеар дип уйласак, $\vec{c} = k\vec{d}$ үтәлерлек k саны була. Ләкин ул вакытта $\vec{c}$ векторының координаталары $\vec{d}$ векторының координаталарына пропорциональ, ә бу — мәсьәләнең шартына каршы килә.

414 Түбәндәге векторлар коллинеар булганда, m һәм n ның кыйммәтләрен табыгыз: а) $\vec{a}\{15; m; 1\}$ һәм $\vec{b}\{18; 12; n\}$; б) $\vec{c}\{m; 0,4; -1\}$ һәм $\vec{d}\{-\frac{1}{2}; n; 5\}$.

415 Түбәндәге векторлар компланармы: а) $\vec{a}\{-3; -3; 0\}$, $\vec{i}$ һәм $\vec{j}$; б) $\vec{b}\{2; 0; -3\}$, $\vec{i}$ һәм $\vec{j}$; в) $\vec{c}\{1; 0; -2\}$, $\vec{i}$ һәм $\vec{k}$; г) $\vec{d}\{1; -1; 2\}$, $\vec{e}\{-2; 0; 1\}$ һәм $\vec{f}\{5; -1; 0\}$; д) $\vec{m}\{1; 0; 2\}$, $\vec{n}\{1; 1; -1\}$ һәм $\vec{p}\{-1; 2; 4\}$; е) $\vec{q}\{0; 5; 3\}$, $\vec{r}\{3; 3; 3\}$ һәм $\vec{s}\{1; 1; 4\}$?

Чишү

г) $\vec{d}\{1; -1; 2\}$ һәм $\vec{e}\{-2; 0; 1\}$ векторлары коллинеар түгел, чөнки берсенең координаталары икенчесенең координаталарына пропорциональ түгел. Әгәр $\vec{f}\{5; -1; 0\}$ векторын $\vec{d}$ һәм $\vec{e}$ векторлары буенча таркатырга мөмкин булса, ул вакытта $\vec{d}$, $\vec{e}$ һәм $\vec{f}$ векторлары компланар. Әгәр дә $\vec{f}$ векторын $\vec{d}$ һәм $\vec{e}$ векторлары буенча таркатып булмаса, ул вакытта $\vec{d}$, $\vec{e}$ һәм $\vec{f}$ векторла-

ры компланар түгел (шулай булмаган очракта $\vec{f}$ векторын $\vec{d}$ һәм $\vec{e}$ векторлары буенча таркатырга мөмкин булыр иде). Шул рәвешле, мәсьәләне чишү өчен, $\vec{f}$ векторын $\vec{d}$ һәм $\vec{e}$ векторлары буенча таркатырга мөмкинме икәнен, ягъни $\vec{f} = x\vec{d} + y\vec{e}$ үтәлердәй x һәм y саннары бармы икәнен ачыкларга кирәк. Бу тигезлекне координаталарда язып табабыз: $5 = x - 2y$, $-1 = -x$, $0 = 2x + y$. Әгәр бу тигезләмәләр системасының x һәм y ка карата чишелеше булса, $\vec{f}$ векторын $\vec{d}$ һәм $\vec{e}$ векторлары буенча таркатырга мөмкин, чишелеше булмаса, $\vec{f}$ векторын $\vec{d}$ һәм $\vec{e}$ векторлары буенча таркатырга ярамый. Бу очракта системаның чишелеше бар: $x = 1$, $y = -2$. Шуңа күрә $\vec{f}$ векторын $\vec{d}$ һәм $\vec{e}$ векторлары буенча таркатырга мөмкин, димәк, $\vec{d}$, $\vec{e}$ һәм $\vec{f}$ векторлары компланар.

416 $\overrightarrow{OA}\{3;\ 2;\ 1\}$, $\overrightarrow{OB}\{1;\ -3;\ 5\}$ һәм $\overrightarrow{OC}\{-\frac{1}{3};\ 0{,}75;\ -2\frac{3}{4}\}$ векторлары бирелгән. O ноктасы координаталар башлангычы булса, A, B һәм C нокталарының координаталарын языгыз.

417 $A\ (2;\ -3;\ 0)$, $B\ (7;\ -12;\ 18)$ һәм $C\ (-8;\ 0;\ 5)$ нокталары бирелгән. O ноктасы координаталар башлангычы булса, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ һәм $\overrightarrow{OC}$ векторларының координаталарын языгыз.

418 а) $A\ (3;\ -1;\ 2)$, $B\ (2;\ -1;\ 4)$; б) $A\ (-2;\ 6;\ -2)$, $B\ (3;\ -1;\ 0)$; в) $A\left(1;\ \frac{5}{6};\ \frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4}\right)$ булса, $\overrightarrow{AB}$ векторының координаталарын табыгыз.

419 ABC өчпочмагының түбәләре: $A\ (1;\ 6;\ 2)$, $B\ (2;\ 3;\ -1)$, $C\ (-3;\ 4;\ 5)$ координаталарына ия. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ һәм $\overrightarrow{CA}$ векторларын $\vec{i}$, $\vec{j}$ һәм $\vec{k}$ векторлары буенча таркатыгыз.

420 $A\ (3;\ -1;\ 5)$, $B\ (2;\ 3;\ -4)$, $C\ (7;\ 0;\ -1)$ һәм $D\ (8;\ -4;\ 8)$ нокталары бирелгән. $\overrightarrow{AB}$ һәм $\overrightarrow{DC}$ векторларының тигез икәнен исбатлагыз. $\overrightarrow{BC}$ һәм $\overrightarrow{AD}$ векторлары тигезме?

421 а) $A(3;\ -7;\ 8)$, $B(-5;\ 4;\ 1)$, $C(27;\ -40;\ 29)$; б) $A(-5;\ 7;\ 12)$, $B(4;\ -8;\ 3)$, $C(13;\ -23;\ -6)$; в) $A(-4;\ 8;\ -2)$, $B(-3;\ -1;\ 7)$, $C(-2;\ -10;\ -16)$ булса, A, B һәм C нокталары бер турыда яталармы?

Чишү

а) $\overrightarrow{AB}$ һәм $\overrightarrow{AC}$ векторлары коллинеар булса, A, B һәм C нокталары бер турыда ята, ә коллинеар булмаса, A, B һәм C нокталары бер турыда ятмый. Бу векторларның координаталарын табабыз: $\overrightarrow{AB}\{-8;\ 11;\ -7\}$, $\overrightarrow{AC}\{24;\ -33;\ 21\}$. $\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AB}$, шуңа күрә $\overrightarrow{AB}$ һәм $\overrightarrow{AC}$ векторлары коллинеар, димәк, A, B һәм C нокталары бер турыда ята.

422 а) $A\ (-2;\ -13;\ 3)$, $B\ (1;\ 4;\ 1)$, $C\ (-1;\ -1;\ -4)$, $D\ (0;\ 0;\ 0)$; б) $A\ (0;\ 1;\ 0)$, $B\ (3;\ 4;\ -1)$, $C\ (-2;\ -3;\ 0)$, $D\ (2;\ 0;\ 3)$; в) $A\ (5;\ -1;\ 0)$, $B\ (-2;\ 7;\ 1)$, $C\ (12;\ -15;\ -7)$, $D\ (1;\ 1;\ -2)$ булса, A, B, C һәм D нокталары бер яссылыкта яталармы?

423 $A\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$, $B\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$, $C\ (x_3;\ y_3;\ z_3)$ түбәләре булган ABC өчпочмагы медианаларының кисешү ноктасы

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3};\ \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3};\ \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}\right)$$

координаталарына ия икәнен исбатлагыз.

424 M ноктасы — AB кисемтәсенең уртасы. а) $A(0; 3; -4)$, $B(-2; 2; 0)$ булса, M ноктасының; б) $A(14; -8; 5)$, $M(3; -2; -7)$ булса, B ноктасының; в) $B(0; 0; 2)$, $M(-12; 4; 15)$ булса, A ноктасының координаталарын табыгыз.

425 AB кисемтәсенең уртасы Ox күчәрендә ята. а) $A(-3; m; 5)$, $B(2; -2; n)$; б) $A(1; 0{,}5; -4)$, $B(1; m; 2n)$; в) $A(0; m; n+1)$, $B(1; n; -m+1)$; г) $A(7; 2m+n; -n)$, $B(-5; -3; m-3)$ булса, m һәм n ны табыгыз.

426 а) $A(-1; 0; 2)$, $B(1; -2; 3)$; б) $A(-35; -17; 20)$, $B(-34; -5; 8)$ булса, $\overrightarrow{AB}$ векторының озынлыгын табыгыз.

427 Векторның озынлыгын табыгыз: $\vec{a}\{5; -1; 7\}$, $\vec{b}\{2\sqrt{3}; -6; 1\}$, $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{d} = -2\vec{k}$, $\vec{m} = \vec{i} - 2\vec{j}$.

428 $\vec{a}\{3; -2; 1\}$, $\vec{b}\{-2; 3; 1\}$ һәм $\vec{c}\{-3; 2; 1\}$ векторлары бирелгән. Табыгыз: а) $|\vec{a}+\vec{b}|$; б) $|\vec{a}|+|\vec{b}|$; в) $|\vec{a}|-|\vec{b}|$; г) $|\vec{a}-\vec{b}|$; д) $|3\vec{c}|$; е) $\sqrt{14}|\vec{c}|$; ж) $|2\vec{a}-3\vec{c}|$.

429 $M(-4; 7; 0)$ һәм $N(0; -1; 2)$ нокталары бирелгән. Координаталар башлангычыннан MN кисемтәсенең уртасына кадәр ераклыкны табыгыз.

430 $A\left(\frac{3}{2}; 1; -2\right)$, $B(2; 2; -3)$ һәм $C(2; 0; -1)$ нокталары бирелгән. а) ABC өчпочмагының периметрын; б) ABC өчпочмагының медианаларын табыгыз.

431 а) $A(9; 3; -5)$, $B(2; 10; -5)$, $C(2; 3; 2)$; б) $A(3; 7; -4)$, $B(5; -3; 2)$, $C(1; 3; -10)$; в) $A(5; -5; -1)$, $B(5; -3; -1)$, $C(4; -3; 0)$; г) $A(-5; 2; 0)$, $B(-4; 3; 0)$, $C(-5; 2; -2)$ булса, ABC өчпочмагының төрен билгеләгез.

432 $A(-3; 4; -4)$ ноктасыннан: а) координаталар яссылыкларына кадәр; б) координаталар күчәрләренә кадәр ераклыкны табыгыз.

433 Координаталар яссылыгының һәркайсында бу координаталар яссылыгы нокталарыннан $A(-1; 2; -3)$ ноктасына кадәр булган барлык ераклыклар арасыннан иң кечкенәсен табыгыз.

434 Координаталар күчәренең һәркайсында бу күчәр нокталарыннан $B(3; -4; \sqrt{7})$ ноктасына кадәр булган барлык ераклыклар арасыннан иң кечкенәсен табыгыз.

435 $A(1; 0; k)$, $B(-1; 2; 3)$, $C(0; 0; 1)$ нокталары бирелгән. k нинди кыйммәтләр алганда, ABC өчпочмагы тигезьянлы була?

436 $A(4; 4; 0)$, $B(0; 0; 0)$, $C(0; 3; 4)$ һәм $D(1; 4; 4)$ нокталары бирелгән. $ABCD$ трапециясенең тигезьянлы икәнен исбатлагыз.

437 $A(-2; 3; 5)$ һәм $B(3; 2; -3)$ нокталарыннан тигез ераклыктагы һәм а) Ox; б) Oy; в) Oz күчәрендә урнашкан ноктаны табыгыз.

438 $A(-1; 2; 3)$, $B(-2; 1; 2)$, $C(0; -1; 1)$ нокталары бирелгән. Бу нокталардан тигез ераклыктагы һәм а) Oxy; б) Oyz; в) Ozx координаталар яссылыгында урнашкан ноктаны табыгыз.

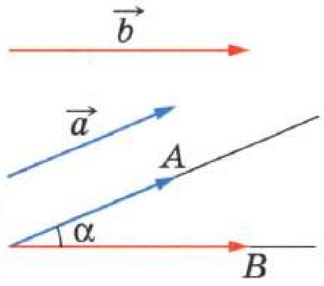
439 $O(0; 0; 0)$, $A(4; 0; 0)$, $B(0; 6; 0)$, $C(0; 0; -2)$ нокталары бирелгән. а) AOB өчпочмагын камаучы әйләнә үзәге координаталарын һәм радиусын; б) $OABC$ тетраэдры түбәләреннән тигез ераклыктагы ноктаның координаталарын табыгыз.

440 m озынлыгындагы CD кисемтәсе катетлары $AC = b$ һәм $BC = a$ булган турыпочмаклы ABC өчпочмагы яссылыгына перпендикуляр. Яраклы координаталар системасы алып, ике нокта арасындагы ераклык формуласы ярдәмендә D ноктасыннан бу өчпочмакның гипотенузасы уртасына кадәр ераклыкны табыгыз.

§ 2 Векторларның скаляр тапкырчыгышы

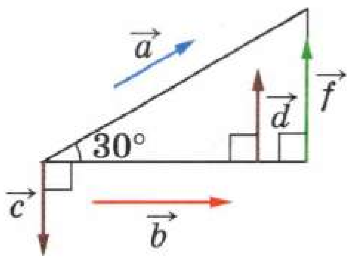
50 Векторлар арасындагы почмак

Теләсә нинди $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторларын алыйк. Нинди дә булса O ноктасыннан башлап, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ һәм $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ векторларын салыйк. Әгәр $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары бердәй юнәлешле булмаса, OA һәм OB нурлары AOB почмагы төзиләр (рәс.133). Бу почмакның градуслы үлчәмен α хәрефе белән тамгалап, **$\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары арасындагы почмак α га тигез** диярбез. Әгәр дә $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары бердәй юнәлешле, аерым очракта, аларның берсе я икесе дә нуль-вектор булса, алар арасындагы почмак 0°ка тигез дип исәпләрбез. Векторлар арасындагы почмак 90°ка тигез булса, ул вакытта векторлар **перпендикуляр** дип атала. $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары арасындагы почмак болай тамгалана: $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$.



Рәс. 133

134 нче рәсемдә берничә вектор сурәтләнгән. Алар арасындагы почмаклар мондый: $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 30°$, $\widehat{\vec{a}\,\vec{c}} = 120°$, $\widehat{\vec{a}\,\vec{d}} = 60°$, $\widehat{\vec{b}\,\vec{c}} = 90°$, $\widehat{\vec{d}\,\vec{f}} = 0°$, $\widehat{\vec{d}\,\vec{c}} = 180°$. Бу рәсемдә $\vec{b} \perp \vec{c}$, $\vec{b} \perp \vec{d}$, $\vec{b} \perp \vec{f}$.



Рәс. 134

51 Векторларның скаляр тапкырчыгышы

Ике вектор озынлыгы белән алар арасындагы почмак косинусының тапкырчыгышы бу векторларның скаляр тапкырчыгышы дип атала. $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторларының скаляр тапкырчыгышы болай тамгалана: $\vec{a}\,\vec{b}$. Шулай итеп,

$$\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}).$$

Планиметриядәге кебек үк, түбәндәге расламалар дөрес:

нуль булмаган ике векторның скаляр тапкырчыгышы бу векторлар перпендикуляр булганда һәм бары тик шул вакытта гына нульгә тигез;

векторның скаляр квадраты (ягъни векторның үзенә скаляр тапкырчыгышы) аның озынлыгының квадратына тигез.

Бу расламаларны үзлегегездән исбатлагыз.

Ике векторның координаталарын белгәндә, аларның скаляр тапкырчыгышын исәпләп чыгарырга мөмкин: **$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ һәм $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ векторларының скаляр тапкырчыгышы**

$$\vec{a}\,\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

формуласы белән аңлатыла. Бу раслама нәкъ планиметриядәге кебек үк исбатлана.

Нуль булмаган $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ һәм $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ векторлары арасындагы α почмагының косинусы

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1 + z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \qquad (1)$$

формуласы буенча исәпләнә.

Дөрестән дә,

$$\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha$$

булганга күрә,

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Биредә $\vec{a}\,\vec{b}$ өчен $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторларының координаталар аша $|\vec{a}|$ һәм $|\vec{b}|$ ның аңлатмаларын куеп, (1) формуласын табарбыз.

Векторларның скаляр тапкырчыгышының төп үзлекләрен әйтеп бирик.

Теләсә нинди $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлары һәм теләсә нинди k саны өчен түбәндәге бәйләнешләр дөрес:

1°. $\vec{a}^{\,2} \geqslant 0$, өстәвенә $\vec{a} \neq \vec{0}$ булганда $\vec{a}^{\,2} > 0$.

2°. $\vec{a}\,\vec{b} = \vec{b}\,\vec{a}$ (урын алыштыру законы).

3°. $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\,\vec{c} + \vec{b}\,\vec{c}$ (тарату законы).

4°. $k(\vec{a}\,\vec{b}) = (k\vec{a})\vec{b}$ (оештыру законы).

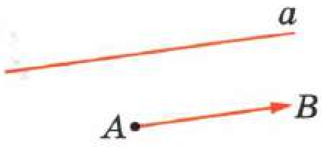
1°—4° расламалары нәкъ планиметриядәге кебек үк исбатлана.

Тарату законы теләсә нинди сандагы кушылучылар өчен урынлы икәнен исбатлавы кыен түгел. Мәсәлән, $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\vec{d} = \vec{a}\,\vec{d} + \vec{b}\,\vec{d} + \vec{c}\,\vec{d}$ (458 нче мәсьәләне кара).

52 Турылар һәм яссылыклар арасындагы почмакларны исәпләп чыгару

Ике туры арасындагы, ә шулай ук туры һәм яссылык арасындагы почмакны исәпләп чыгару өчен, күп очракта скаляр тапкырчыгыштан файдалану уңай

була. Почмакларны исәпләп чыгаруга шундый ике мәсьәлә тикшергәнгә кадәр турының юнәлдерүче векторы төшенчәсен бирик.



Рәс. 135

Нуль булмаган вектор я *a* турысында, я *a* турысына параллель турыда ятса, ул *a* турысының юнәлдерүче векторы дип атала. 135 нче рәсемдә $\overrightarrow{AB}$ векторы *a* турысының юнәлдерүче векторы була.

1 нче мәсьәлә

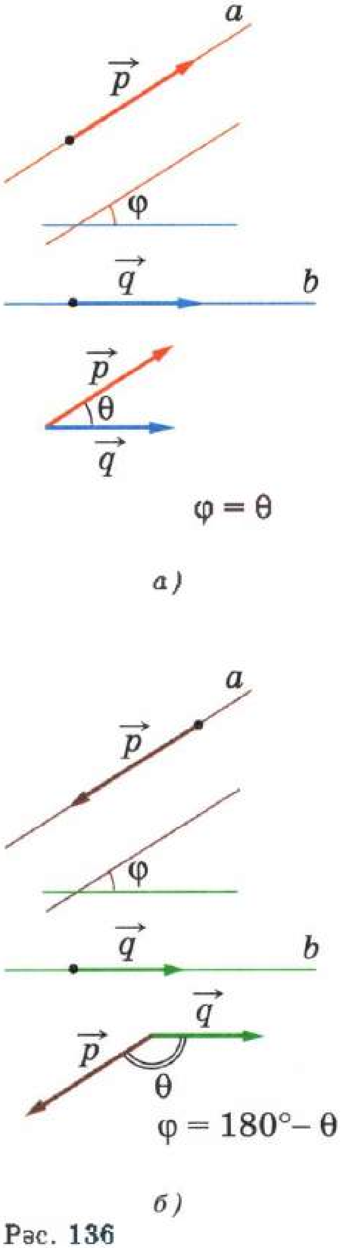
Ике турының юнәлдерүче векторларының координаталары билгеле булса, бу ике туры (кисешүче яки чалышма турылар) арасындагы почмакны табарга.

Чишү

$\vec{p}\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ һәм $\vec{q}\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$ — *a* һәм *b* турыларының юнәлдерүче векторлары булсын. Бу турылар арасындагы эзләнелгән почмакны φ хәрефе белән тамгалыйк. Мәсьәләне чишү өчен, $\cos\varphi$ не табу җитә, чөнки $\cos\varphi$ нең кыйммәте φ почмагын табарга мөмкинлек бирә.

$\theta = \widehat{\vec{p}\,\vec{q}}$ тамгаланышын кертик. Ул вакытта $\theta \leqslant 90°$ булганда, $\varphi = \theta$ (рәс. 136, *а*), $\theta > 90°$ булганда, $\varphi = 180° - \theta$ (рәс. 136, б). Шуңа күрә $\cos\varphi = \cos\theta$, яки $\cos\varphi = -\cos\theta$. Теләсә кайсы очракта $|\cos\varphi| = |\cos\theta|$, ә $\varphi \leqslant 90°$ булганга, $\cos\varphi \geqslant 0$, димәк, $\cos\varphi = |\cos\theta|$. 51 нче пункттагы (1) формуласыннан файдаланып табабыз:

$$\cos\varphi = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \qquad (2)$$



Рәс. 136

2 нче мәсьәлә

Турының юнәлдерүче векторының координаталары һәм нуль булмаган яссылыкка перпендикуляр векторның координаталары билгеле булса, туры һәм яссылык арасындагы почмакны табарга.

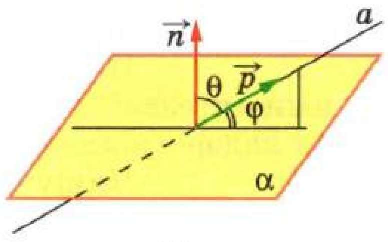
Чишү

$\vec{p}\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ — *a* турысының юнәлдерүче векторы, $\vec{n}\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$ — α яссылыгына перпендикуляр нуль булмаган вектор булсын. Бу исә $\vec{n}$ векторы яткан туры α яссылыгына перпендикуляр икәнен белдерә. *a* турысы һәм α яссылыгы арасындагы эзләнелгән почмакны — φ хәрефе белән, ә $\widehat{\vec{p}\,\vec{n}}$ почмагын θ хәрефе белән тамгалыйбыз.

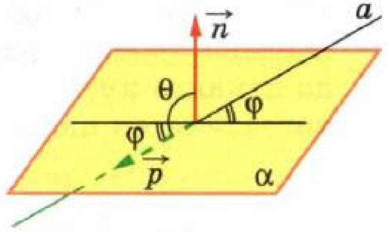
137 нче рәсемнән файдаланып, $\sin\varphi = |\cos\theta|$ икәнен исбатлау кыен түгел (моны үзлегегездән эшләгез). Шуңа күрә $\sin\varphi$ өчен дә (2) тигезлегенең уң кисәгендәге кебек үк аңлатма килеп чыга. $\sin\varphi$ не белгәч һәм $\varphi \leqslant 90°$ икәнен искә алып, φ почмагын табарга мөмкин.

53* Яссылык тигезләмәсе

Турыпочмаклы координаталар системасы $Oxyz$ һәм ниндидер F өслеге, мәсәлән, яссылык бирелгән булсын. Өч үзгәрешле x, y, z кергән тигезләмәдә, әгәр бу тигезләмәне F өслегенең теләсә кайсы ноктасының координаталары канәгатьләндерсә, ә бу өслектә ятмаган берничә ноктаның да координаталары канәгатьләндермәсәләр, ул **F өслегенең тигезләмәсе** дип атала. Искәртеп китәбез: өслек тигезләмәсе төшенчәсе планиметрия курсында бирелгән сызык тигезләмәсе төшенчәсенә охшаш.



а)



б)

Рәс. 137

M_0 $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ ноктасы аша үтүче һәм нуль булмаган $\vec{n}$ $(a;\ b;\ c)$ векторына перпендикуляр α яссылыгының тигезләмәсен чыгарыйк.

Әгәр M_0 белән тәңгәл килмәгән M $(x;\ y;\ z)$ ноктасы α яссылыгында ятса, $\vec{n}$ $(a;\ b;\ c)$ һәм $\overline{M_0M}$ $(x - x_0;\ y - y_0;\ z - z_0)$ векторлары үзара перпендикуляр, шуңа күрә аларның скаляр тапкырчыгышы нульгә тигез:

$$a\ (x - x_0) + b\ (y - y_0) + c\ (z - z_0) = 0. \qquad (3)$$

M_0 ноктасының координаталары да бу тигезләмәне канәгатьләндергәнен әйтеп китәбез. Әгәр дә $M\,(x;\ y;\ z)$ ноктасы α яссылыгында ятмаса, $\vec{n}$ һәм $\overline{M_0M}$ векторлары арасындагы почмак 90° тан (M_0M турысы белән α яссылыгы арасындагы почмак зурлыгы кадәр) аерыла, шуңа күрә бу векторларның скаляр тапкырчыгышы нульгә тигез түгел, димәк, (3) тигезлеге үтәлми.

Шулай итеп, (3) тигезләмәсен α яссылыгының теләсә кайсы ноктасының координаталары канәгатьләндерә, ә бу яссылыкта ятмаган берничә ноктаның да координаталары канәгатьләндерми. Шуңа күрә **(3) тигезләмәсе M_0 $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ ноктасы аша үтүче һәм нуль булмаган $\vec{n}$ $(a;\ b;\ c)$ векторына перпендикуляр яссылыкның тигезләмәсе була.**

Искәрмә.

(3) тигезләмәсен шулай ук

$$ax + by + cz + d = 0$$

(биредә $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$) рәвешендә язарга мөмкин. Шул рәвешле, **турыпочмаклы координаталар системасында яссылыкның тигезләмәсе беренче дәрәҗә тигезләмә була.**

Яссылык тигезләмәсен бирелгән ноктадан әлеге яссылыкка кадәр ераклыкны исәпләп чыгару өчен файдаланырга мөмкин.

3 нче мәсьәлә

Ноктаның координаталары һәм яссылыкның тигезләмәсе билгеле булганда, ноктадан яссылыкка кадәр ераклыкны табарга.

Чишү

$M_0\ (x_0;\ y_0;\ z_0)$ — бирелгән нокта, $ax+by+$ $+cz+d=0\ (a^2+b^2+c^2\neq 0)$ — бирелгән α яссылыгының тигезләмәсе, $M_1\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$ — M_0 ноктасының α яссылыгына проекциясе булсын. M_1 ноктасы α яссылыгында ятканга күрә, аның координаталары бу яссылыкның тигезләмәсен канәгатьләндерә:

$$ax_1+by_1+cz_1+d=0. \qquad (4)$$

$\overrightarrow{M_0M_1}$ векторы (әгәр $\overrightarrow{M_0M_1}\neq\vec{0}$ булса), $\vec{n}\ (a;\ b;\ c)$ векторы кебек үк, α яссылыгына перпендикуляр, шуңа күрә $\overrightarrow{M_0M_1}\parallel\vec{n}$ (әгәр $\overrightarrow{M_0M_1}=\vec{0}$ булса, шулай ук $\overrightarrow{M_0M_1}\parallel\vec{n}$). Димәк, $\overrightarrow{M_0M_1}=k\vec{n}$ үтәлердәй k саны бар. Бу тигезлекне координаталарда язабыз:

$$x_1-x_0=ka,\ y_1-y_0=kb,\ z_1-z_0=kc. \qquad (5)$$

Эзләнелгән ераклык l ның $\overline{M_0M}$ векторының озынлыгына, ягъни $\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}$ га тигез икәнен искәрәбез. Шул рәвешле, (5) тигезлеген исәпкә алып табабыз:

$$l=|k|\sqrt{a^2+b^2+c^2}. \qquad (6)$$

Хәзер M_1 ноктасының координаталарын (5) тигезләмәсен кулланып табабыз һәм аларны (4) тигезләмәсенә куябыз:

$$a\ (ka+x_0)+b\ (kb+y_0)+c\ (kc+z_0)+d=0.$$

Моннан табабыз:

$$k=-\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}.$$

Шул рәвешле, (6) формуласы түбәндәге рәвешне ала:

$$l=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Мәсьәләләр

441 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы бирелгән. Түбәндәге векторлар арасындагы почмакны табыгыз: а) $\overrightarrow{B_1B}$ һәм $\overrightarrow{B_1C}$; б) $\overrightarrow{DA}$ һәм $\overrightarrow{B_1D_1}$; в) $\overrightarrow{A_1C_1}$ һәм $\overrightarrow{A_1B}$; г) $\overrightarrow{BC}$ һәм $\overrightarrow{AC}$; д) $\overrightarrow{BB_1}$ һәм $\overrightarrow{AC}$; е) $\overrightarrow{B_1C}$ һәм $\overrightarrow{AD_1}$; ж) $\overrightarrow{A_1D_1}$ һәм $\overrightarrow{BC}$; з) $\overrightarrow{AA_1}$ һәм $\overrightarrow{C_1C}$.

442 $\overrightarrow{AB}$ һәм $\overrightarrow{CD}$ векторлары арасындагы почмак φ гә тигез. $\widehat{\overrightarrow{BA}\,\overrightarrow{DC}}$, $\widehat{\overrightarrow{BA}\,\overrightarrow{CD}}$, $\widehat{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{DC}}$ почмакларын табыгыз.

443 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының кабыргасы a га тигез, O_1 ноктасы — $A_1B_1C_1D_1$ кырының үзәге.
а) $\overrightarrow{AD}$ һәм $\overrightarrow{B_1C_1}$; б) $\overrightarrow{AC}$ һәм $\overrightarrow{C_1A_1}$; в) $\overrightarrow{D_1B}$ һәм $\overrightarrow{AC}$; г) $\overrightarrow{BA_1}$ һәм $\overrightarrow{BC_1}$; д) $\overrightarrow{A_1O_1}$ һәм $\overrightarrow{A_1C_1}$; е) $\overrightarrow{D_1O_1}$ һәм $\overrightarrow{B_1O_1}$; ж) $\overrightarrow{BO_1}$ һәм $\overrightarrow{C_1B}$ векторларының скаляр тапкырчыгышын табыгыз.

444 $\vec{a}\{1;\ -1;\ 2\}$, $\vec{b}\{-1;\ 1;\ 1\}$ һәм $\vec{c}\{5;\ 6;\ 2\}$ векторлары бирелгән. Исәпләп чыгарыгыз: $\vec{a}\,\vec{c}$, $\vec{a}\,\vec{b}$, $\vec{b}\,\vec{c}$, $\vec{a}\,\vec{a}$, $\sqrt{\vec{b}\,\vec{b}}$.

445 $\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$ һәм $\vec{b} = \vec{j} - 5\vec{k}$ векторлары бирелгән. Исәпләп чыгарыгыз: а) $\vec{a}\,\vec{b}$; б) $\vec{a}\,\vec{i}$; в) $\vec{b}\,\vec{j}$; г) $(\vec{a} + \vec{b})\vec{k}$; д) $(\vec{a} - 2\vec{b})\,(\vec{k} + \vec{i} - 2\vec{j})$.

446 $\vec{a}\{3;\ -1;\ 1\}$, $\vec{b}\{-5;\ 1;\ 0\}$ һәм $\vec{c}\ \{-1;\ -2;\ 1\}$ векторлары бирелгән. а) $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$; б) $\vec{b}$ һәм $\vec{c}$; в) $\vec{a}$ һәм $\vec{c}$ векторлары арасындагы почмакның нинди (кысынкы, туры яки җәенкеме) икәнен ачыклагыз.

447 $\vec{a}\{3;\ -5;\ 0\}$ векторы бирелгән. а) $\widehat{\vec{a}\,\vec{i}} < 90°$; б) $\widehat{\vec{a}\,\vec{j}} > 90°$; в) $\widehat{\vec{a}\,\vec{k}} = 90°$ икәнен исбатлагыз.

448 $\vec{a}\{-1;\ 2;\ 3\}$ һәм $\vec{b}\{5;\ x;\ -1\}$ векторлары бирелгән. а) $\vec{a}\,\vec{b} = 3$; б) $\vec{a}\,\vec{b} = -1$; в) $\vec{a} \perp \vec{b}$ шарты x ның нинди кыйммәте өчен үтәлә?

449 $\vec{a} = m\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ һәм $\vec{b} = 4\vec{i} + m\vec{j} - 7\vec{k}$ векторлары бирелгән. m ның нинди кыйммәтендә $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары перпендикуляр?

450 $A\ (0;\ 1;\ 2)$, $B\ (\sqrt{2};1;\ 2)$, $C\ (\sqrt{2};\ 2;\ 1)$ һәм $D\ (0;\ 2;\ 1)$ нокталары бирелгән. $ABCD$ ның квадрат икәнен исбатлагыз.

451 Векторлар арасындагы почмакны исәпләп чыгарыгыз:
а) $\vec{a}\{2;\ -2;\ 0\}$ һәм $\vec{b}\{3;\ 0;\ -3\}$; б) $\vec{a}\{\sqrt{2};\ \sqrt{2};\ 2\}$ һәм $\vec{b}\{-3;\ -3;\ 0\}$; в) $\vec{a}\{0;\ 5;\ 0\}$ һәм $\vec{b}\{0;\ -\sqrt{3};\ 1\}$; г) $\vec{a}\{-2{,}5;\ 2{,}5;\ 0\}$ һәм $\vec{b}\{-5;\ 5;\ 5\sqrt{2}\}$; д) $\vec{a}\{-\sqrt{2};\ -\sqrt{2};\ -2\}$ һәм $\vec{b}\left\{\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2};\ -1\right\}$.

452 $\vec{a}\{2;\ 1;\ 2\}$ векторы һәм координаталар векторлары арасындагы почмакларны исәпләгез.

453 $A\ (1;\ 3;\ 0)$, $B\ (2;\ 3;\ -1)$ һәм $C(1;\ 2;\ -1)$ нокталары бирелгән. $\overrightarrow{CA}$ һәм $\overrightarrow{CB}$ векторлары арасындагы почмакны исәпләгез.

454 $A(1;\ -1;\ 3)$, $B(3;\ -1;\ 1)$ һәм $C(-1;\ 1;\ 3)$ нокталары түбәләре булган өчпочмакның почмакларын, периметрын һәм мәйданын табыгыз.

455 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы бирелгән. а) $\overrightarrow{AA_1}$ һәм $\overrightarrow{AC_1}$; б) $\overrightarrow{BD_1}$ һәм $\overrightarrow{DB_1}$; в) $\overrightarrow{DB}$ һәм $\overrightarrow{AC_1}$ векторлары арасындагы почмакның косинусын исәпләп чыгарыгыз.

456 $AB = 1$, $BC = CC_1 = 2$ булган турыпочмаклы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеды бирелгән. $\overrightarrow{DB_1}$ һәм $\overrightarrow{BC_1}$ векторлары арасындагы почмакны исәпләп чыгарыгыз.

457 $\widehat{\vec{a}\vec{c}} = \widehat{\vec{b}\vec{c}} = 60°$, $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = |\vec{c}| = 2$ икәне билгеле. $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c}$ ны исәпләп чыгарыгыз.

458 $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\vec{d} = \vec{a}\vec{d} + \vec{b}\vec{d} + \vec{c}\vec{d}$ тигезлегенең дөреслеген исбатлагыз.

Чишү

$\vec{a}$, $\vec{b}$ һәм $\vec{c}$ векторларының суммасын $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ рәвешендә язабыз. Векторларның скаляр тапкырчыгышының тарату законыннан файдаланып табабыз: $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\vec{d} = ((\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c})\vec{d} = (\vec{a} + \vec{b})\vec{d} + \vec{c}\vec{d} = (\vec{a}\vec{d} + \vec{b}\vec{d}) + \vec{c}\vec{d} = \vec{a}\vec{d} + \vec{b}\vec{d} + \vec{c}\vec{d}$.

459 $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары $\vec{c}$ векторына перпендикуляр, $\widehat{\vec{a}\vec{b}} = 120°$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$. Скаляр тапкырчыгышны исәпләп чыгарыгыз: а) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})(2\vec{b})$ һәм $(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})(\vec{a} - \vec{c})$; б) $|\vec{a} - \vec{b}|$ һәм $|\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}|$.

460 Турыпочмаклы координаталар системасында нуль булмаган векторның координаталары $\{|\vec{a}| \cos \varphi_1; |\vec{a}| \cos \varphi_2; |\vec{a}| \cos \varphi_3\}$ (биредә $\varphi_1 = \widehat{\vec{a}\vec{i}}$, $\varphi_2 = \widehat{\vec{a}\vec{j}}$, $\varphi_3 = \widehat{\vec{a}\vec{k}}$) кә тигез икәнен исбатлагыз.

Чишү

Әгәр $\vec{a}$ векторы $\{x; y; z\}$ координаталарына ия булса, ул вакытта $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Бу тигезлекне $\vec{i}$ векторына скаляр тапкырлап һәм скаляр тапкырчыгыш үзлегеннән файдаланып табабыз: $\vec{a}\vec{i} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})\vec{i} = x(\vec{i}\vec{i}) + y(\vec{j}\vec{i}) + z(\vec{k}\vec{i})$. $\vec{i}\vec{i} = 1$, $\vec{j}\vec{i} = 0$, $\vec{k}\vec{i} = 0$ булганга күрә, $\vec{a}\vec{i} = x$. Икенче яктан, скаляр тапкырчыгышның билгеләмәсе буенча $\vec{a}\vec{i} = |\vec{a}||\vec{i}| \cos \varphi_1 = |\vec{a}| \cos \varphi_1$. Шул рәвешле, $x = |\vec{a}| \cos \varphi_1$. Шундый ук юл белән табабыз: $y = |\vec{a}| \cos \varphi_2$, $z = |\vec{a}| \cos \varphi_3$.

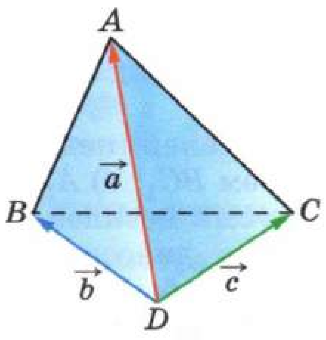
461 $ABCD$ тетраэдрының барлык кабыргалары да тигез. M һәм N нокталары — AD һәм BC кабыргаларының урталары. $\overrightarrow{MN}\,\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{MN}\,\overrightarrow{BC} = 0$ икәнен исбатлагыз.

462 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедында $AA_1 = AB = AD = 1$, $\angle DAB = 60°$, $\angle A_1AD = \angle A_1AB = 90°$. Исәпләп чыгарыгыз: а) $\overrightarrow{BA}\ \overrightarrow{D_1C_1}$; б) $\overrightarrow{BC_1}\ \overrightarrow{D_1B}$; в) $\overrightarrow{AC_1}\ \overrightarrow{AC_1}$; г) $|\overrightarrow{DB_1}|$; д) $|\overrightarrow{A_1C}|$; е) $\cos(\widehat{\overrightarrow{DA_1}\ \overrightarrow{D_1B}})$; ж) $\cos(\widehat{\overrightarrow{AC_1}\ \overrightarrow{DB_1}})$.

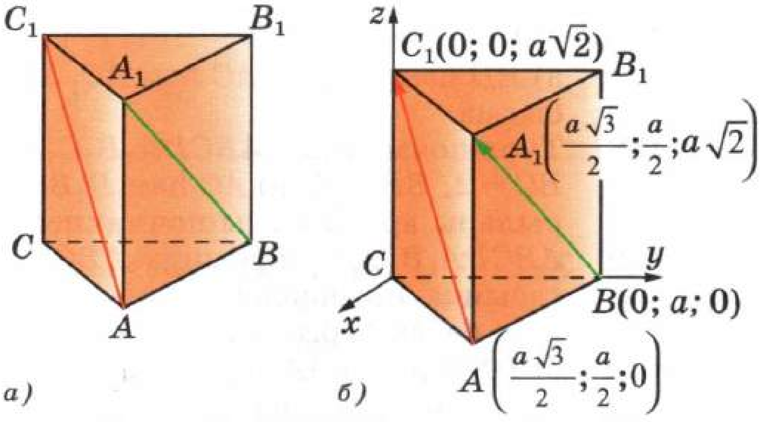
463 $ABCD$ тетраэдрында AD һәм BC — капма-каршы кабыргалар, ә BD һәм AC перпендикуляр. Капма-каршы кабыргалары CD һәм AB шулай ук перпендикуляр икәнен исбатлагыз.

Чишү

$\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$ векторларын кертик (рәс. 138). Ул вакытта $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$. Шарт буенча $AD \perp BC$ һәм $BD \perp AC$, шуңа күрә $\vec{a} \perp (\vec{c} - \vec{b})$ һәм $\vec{b} \perp (\vec{c} - \vec{a})$. Димәк, $\vec{a}(\vec{c} - \vec{b}) = 0$ һәм $\vec{b}(\vec{c} - \vec{a}) = 0$. Моннан $\vec{a}\vec{c} = \vec{a}\vec{b}$ һәм $\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{a}$ икәнен таба-



Рәс. 138



Рәс. 139

быз. Бу ике тигезлектән $\vec{a}\,\vec{c} = \vec{b}\,\vec{c}$, яки $(\vec{b} - \vec{a})\,\vec{c} = 0$ икәнлеге килеп чыга. Ләкин $\vec{b} - \vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{DC}$, шуңа күрә $\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{DC} = 0$, димәк, $AB \perp DC$, шуны исбат итәргә кирәк иде дә.

464 а) $A\ (3;\ -2;\ 4)$, $B\ (4;\ -1;\ 2)$, $C\ (6;\ -3;\ 2)$, $D\ (7;\ -3;\ 1)$; б) $A\ (5;\ -8;\ -1)$, $B\ (6;\ -8;\ -2)$, $C\ (7;\ -5;\ -11)$, $D\ (7;\ -7;\ -9)$; в) $A\ (1;\ 0;\ 2)$, $B\ (2;\ 1;\ 0)$, $C\ (0;\ -2;\ -4)$, $D\ (-2;\ -4;\ 0)$; г) $A\ (-6;\ -15;\ 7)$, $B\ (-7;\ -15;\ 8)$; $C\ (14;\ -10;\ 9)$, $D\ (14;\ -10;\ 7)$ булса, AB һәм CD турылары арасындагы почмакны исәпләп чыгарыгыз.

465 Өчпочмаклы төзек $ABCA_1B_1C_1$ призмасында $AA_1 = \sqrt{2}AB$ (рәс. 139, *а*). AC_1 һәм A_1B турылары арасындагы почмакны табыгыз.

Чишү

$AB = a$ булсын, ул вакытта $AA_1 = \sqrt{2}a$. 139, *б* рәсемендә күрсәтелгәнчә, турыпочмаклы координаталар системасын бирик. A, B, A_1, C_1 түбәләре түбәндәге координаталарга ия (ни өчен икәнен аңлатыгыз): $A\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\ \frac{a}{2};\ 0\right)$, $B\ (0;\ a;\ 0)$, $A_1\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\ \frac{a}{2};\ a\sqrt{2}\right)$, $C_1\ (0;\ 0;\ a\sqrt{2})$. Моннан $\overrightarrow{AC_1}$ һәм $\overrightarrow{BA_1}$ векторларының координаталарын табабыз:

$$\overrightarrow{AC_1}\left\{\frac{-a\sqrt{3}}{2};\ \frac{-a}{2};\ a\sqrt{2}\right\},\ \overrightarrow{BA_1}\left\{\frac{a\sqrt{3}}{2};\ \frac{-a}{2};\ a\sqrt{2}\right\}.$$

$\overrightarrow{AC_1}$ һәм $\overrightarrow{BA_1}$ векторлары AC_1 һәм A_1B турыларының юнәлдерүче векторлары булып торалар. Алар арасындагы эзләнелә торган φ почмагын (2) формуласыннан табарга мөмкин:

$$\cos\varphi = \frac{\left|-\frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2 + 2a^2\right|}{\sqrt{\frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2 + 2a^2} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2 + 2a^2}} = \frac{1}{2},\ \text{моннан } \varphi = 60^\circ.$$

466. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында M ноктасы AA_1 кабыргасында ята, өстәвенә $AM : MA_1 = 3 : 1$, ә N ноктасы — BC кабыргасының уртасы. а) MN һәм DD_1; б) MN һәм BD; в) MN һәм B_1D; г) MN һәм A_1C турылары арасындагы почмакның косинусын исәпләп чыгарыгыз.

467 Турыпочмаклы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедында $AB=BC=\frac{1}{2}AA_1$. а) BD һәм CD_1; б) AC һәм AC_1 турылары арасындагы почмакны табыгыз.

468 Турыпочмаклы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедында $AB = 1$, $BC = 2$, $BB_1 = 3$. а) AC һәм D_1B; б) AB_1 һәм BC_1; в) A_1D һәм AC_1 турылары арасындагы почмакның косинусын исәпләп чыгарыгыз.

469 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында $ABCD$ кырының диагональләре N ноктасында кисешәләр, ә M ноктасы A_1D_1 кабыргасында ята, шуның белән бергә, $A_1M : MD_1 = 1 : 4$. MN турысы белән: а) $ABCD$; б) DD_1C_1C; в) AA_1D_1D кыры яссылыгы арасындагы почмакның синусын исәпләп чыгарыгыз.

470 $ABCD$ тетраэдрында $\angle ABD = \angle ABC = \angle DBC = 90°$, $AB = BD = 2$, $BC = 1$. AD һәм BC кабыргаларының урталары аша үтүче туры белән: а) ABD; б) DBC; в) ABC кыры яссылыгы арасындагы почмакның синусын исәпләп чыгарыгыз.

471 Берсе — куб диагонален, икенчесе куб кырының диагонален эченә алган чалышма турылар арасындагы почмакның 90°ка тигез икәнен исбатлагыз.

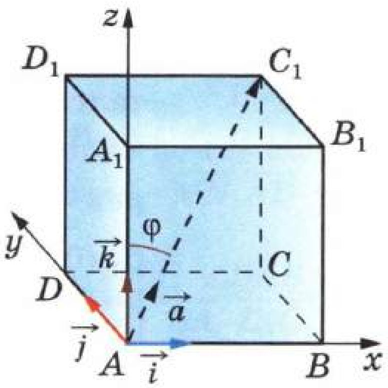
472 $MNPQM_1N_1P_1Q_1$ кубында PM_1 турысының MN_1Q_1 һәм QNP_1 яссылыкларына перпендикуляр икәнен исбатлагыз.

473 OA, OB һәм OC нурлары туры AOB, AOC һәм BOC почмакларын төзиләр. COA һәм AOB почмакларының биссектрисалары арасындагы почмакны табыгыз.

474 Турыпочмаклы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедында $\angle BAC_1 = \angle DAC_1 = 60°$, $\angle A_1AC_1 = \varphi$ не табыгыз.

Чишү

140 нчы рәсемдә күрсәтелгәнчә, турыпочмаклы $Oxyz$ координаталар системасын бирик һәм $\overrightarrow{AC_1}$ векторы белән бердәй юнәлештәге $\vec{a}$ берәмлек векторын тикшерик. $\vec{a}$ векторы $\{\cos 60°;\ \cos 60°;\ \cos\varphi\}$, яки $\left\{\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ \cos\varphi\right\}$ координаталарына ия. $|\vec{a}| = 1$ булганга күрә, $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\cos^2\varphi = 1$. Моннан $\cos^2\varphi = \frac{1}{2}$, яки $\cos\varphi = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ икәнен табабыз. φ почмагы кысынкы булгач, $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, моннан $\varphi = 45°$.



Рәс. 140

475 $DABC$ тетраэдрында $DA = 5$ см, $AB = 4$ см, $AC = 3$ см, $\angle BAC = 90°$, $\angle DAB = 60°$, $\angle DAC = 45°$. A түбәсеннән DBC өчпочмагы медианаларының кисешү ноктасына кадәр ераклыкны табыгыз.

476 Турыпочмаклы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедының AC_1 диагонале белән AB һәм AD кабыргаларының һәркайсы арасындагы почмак 60°ка тигез. $\angle CAC_1$ не табыгыз.

477 K ноктасының $ABCD$ квадраты яссылыгына проекциясе бу квадратның үзәге белән тәңгәл килә. AK һәм BD турылары арасындагы почмакның 90°ка тигез икәнен исбатлагыз.

§ 3 Хәрәкәт

54 Үзәкле симметрия

Планиметрия курсында без яссылыкның хәрәкәте, ягъни нокталары арасында ераклыклар сакланган рәвештә яссылыкны үзенә чагылдыру белән таныштык. Хәзер пространство хәрәкәте төшенчәсен бирербез. Башта **пространствоны үзенә чагылдыру** сүзләреннән нәрсә аңларга кирәклеген ачыклыйк. Пространствоның һәр M ноктасына никдидер M_1 ноктасы тиңдәш итеп куелган, шуның белән бергә, пространствоның теләсә нинди M_1 ноктасы ниндидер M ноктасына тиңдәш ителгән булып чыга дип уйлыйк. Ул вакытта **пространствоның үзенә чагылдыруы** бирелгән, диләр. Шулай ук әлеге чагылдыруда **M ноктасы M_1 ноктасына күчә (чагылдырыла)**, диләр. **Пространство хәрәкәте** дигәннән, теләсә нинди A һәм B нокталары, $AB = A_1B_1$ булырлык итеп, ниндидер A_1 һәм B_1 нокталарына күчкәндә (чагылдырылганда), пространствоның үзенә күчүен аңларга кирәк. Икенче сүзләр белән әйткәндә, **пространство хәрәкәте — нокталары арасындагы ераклыклар сакланган рәвештә пространствоны үзенә чагылдыру ул.** Хәрәкәткә мисал булып **үзәкле симметрия** — бирелгән O үзәгенә карата теләсә нинди M ноктасы аңа симметрик булган M_1 ноктасына күчкәндә пространствоның үзенә чагылдырылуы хезмәт итә ала.

Үзәкле симметрия хәрәкәт икәнен исбатлыйк. Симметрия үзәген O хәрефе белән тамгалыйбыз да башлангычы O ноктасында булган турыпочмаклы $Oxyz$ координаталар системасын кертәбез. O ноктасына карата симметрик булган $M\ (x;\ y;\ z)$ һәм $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ нокталарының координаталары арасында бәйләнеш урнаштырыйк. Әгәр M ноктасы O үзәге белән тәңгәл килмәсә, ул вакытта O ноктасы MM_1 кисемтәсенең уртасы була. Кисемтә уртасының координаталары өчен формуладан файдаланабыз: $\frac{x+x_1}{2} = 0$, $\frac{y+y_1}{2} = 0$, $\frac{z+z_1}{2} = 0$, моннан $x_1 = -x$, $y_1 = -y$, $z_1 = -z$. Бу формулалар M һәм O нокталары тәңгәл килгән очракта да дөрес кала (ни өчен икәнен аңлатыгыз).

Хәзер теләсә нинди $A\,(x_1;\ y_1;\ z_1)$ һәм $B\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$ нокталарын тикшереп, аларга симметрик

булган A_1 һәм B_1 нокталары арасындагы ераклык AB га тигез икәнен исбатларбыз. A_1 һәм B_1 нокталары $A_1(-x_1; -y_1; -z_1)$ һәм $B_1(-x_2; -y_2; -z_2)$ координаталарына ия. Ике нокта арасындагы ераклык формуласыннан табабыз: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$, $A_1B_1 = \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2 + (-z_2 + z_1)^2}$. Бу бәйләнешләрдән $AB = A_1B_1$ икәнлеге ачык күренә, шуны исбатларга кирәк иде дә.

55 Күчәрле симметрия

a күчәренә карата пространствоның теләсә нинди M ноктасы аңа симметрик булган M_1 ноктасына күчсә, пространствоны болай үзенә чагылдыру күчәре *a* булган **күчәрле симметрия** дип атала.

Күчәрле симметрия хәрәкәт икәнен исбатлыйк. Моның өчен Oz күчәре симметрия күчәре белән тәңгәл килерлек итеп, турыпочмаклы $Oxyz$ координаталар системасын кертәбез һәм Oz күчәренә карата симметрик булган $M(x; y; z)$ һәм $M_1(x_1; y_1; z_1)$ нокталарының координаталары арасында бәйләнеш урнаштырабыз. Әгәр M ноктасы Oz күчәрендә ятмаса, Oz күчәре: 1) MM_1 кисемтәсенең уртасы аша үтә һәм 2) аңа перпендикуляр. Беренче шарттан кисемтәнең уртасы координаталары формуласыннан табабыз: $\frac{x+x_1}{2} = 0$ һәм $\frac{y+y_1}{2} = 0$, моннан $x_1 = -x$ һәм $y_1 = -y$. Икенче шарт M һәм M_1 нокталарының аппликаталары тигез икәнен белдерә: $z_1 = z$. Табылган формулалар M ноктасы Oz күчәрендә яткан очрак өчен дөрес кала (ни өчен икәнен аңлатыгыз).

Хәзер теләсә нинди $A(x_1; y_1; z_1)$ һәм $B(x_2; y_2; z_2)$ нокталарын тикшереп, аларга симметрик булган A_1 һәм B_1 нокталары арасындагы ераклык AB га тигез икәнен исбатлыйк. A_1 һәм B_1 нокталары $A_1(-x_1; -y_1; z_1)$ һәм $B_1(-x_2; -y_2; z_2)$ координаталарына ия. Ике нокта арасындагы ераклыкны формула буенча табабыз: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$, $A_1B_1 = \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$. Бу бәйләнешләрдән $AB = A_1B_1$ икәнлеге ачык күренә, шуны исбат итәргә кирәк иде дә.

56 Көзгедәгечә симметрия

α яссылыгына карата теләсә нинди M ноктасы аңа симметрик булган M_1 ноктасына күчкәндә, пространствоны үзенә чагылдыру **көзгедәгечә симметрия** (α яссылыгына карата симметрия) дип атала.

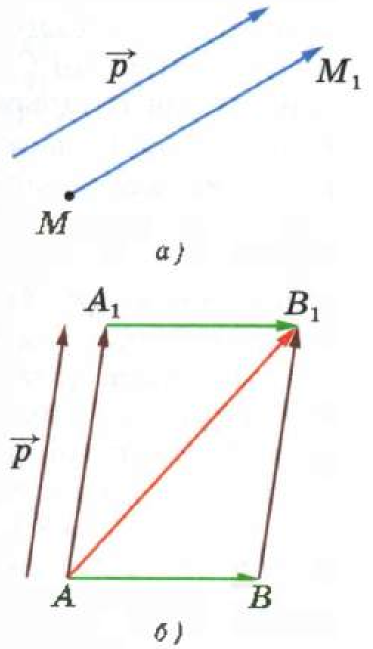
Көзгедәгечә симметрия хәрәкәт икәнен исбатлыйк. Моның өчен Oxy яссылыгы симметрия яссылыгы белән тәңгәл килерлек итеп, турыпочмаклы $Oxyz$ координаталар системасын кертәбез һәм Oxy яссылыгына карата симметрик $M(x;\ y;\ z)$ һәм $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ нокталарының координаталары арасында бәйләнеш урнаштырабыз. Әгәр M ноктасы Oxy яссылыгында ятмаса, бу яссылык: 1) MM_1 кисемтәсенең уртасы аша үтә һәм 2) аңа перпендикуляр була. Беренче шарттан кисемтә уртасының координаталары формуласы буенча $\frac{z+z_1}{2}=0$ икәнен табабыз, моннан $z_1=-z$. Икенче шарт MM_1 кисемтәсенең Oz күчәренә параллель икәнен белдерә, димәк, $x_1=x$, $y_1=y$. Табылган формулалар M ноктасы Oxy яссылыгында яткан очрак өчен дә дөрес кала (ни өчен икәнен аңлатыгыз).

Хәзер теләсә нинди $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ һәм $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ нокталарын тикшереп, аларга симметрик булган A_1 һәм B_1 нокталары арасындагы ераклыкның AB га тигез икәнен исбатлыйк: A_1 һәм B_1 нокталары $A_1(x_1;\ y_1;\ -z_1)$ һәм $B_1(x_2;\ y_2;\ -z_2)$ координаталарына ия. Ике нокта арасындагы ераклык формуласыннан табабыз: $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$, $A_1B_1=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(-z_2+z_1)^2}$. Бу бәйләнешләрдән $AB=A_1B_1$ икәнлеге ачык күренә, шуны исбат итәргә кирәк иде дә.

57 Параллель күчерү

Пространство хәрәкәтенә тагын бер мисал китерик. Нинди дә булса $\vec{p}$ векторы алыйк. Теләсә нинди M ноктасы $\overrightarrow{MM_1}=\vec{p}$ булган M_1 ноктасына күчәрлек итеп, пространствоның үзенә чагылдырылуы $\vec{p}$ векторга **параллель күчерү** дип атала (рәс. 141, *а*).

Параллель күчерү хәрәкәт икәнен исбат итик. $\vec{p}$ векторга параллель күчерүдә теләсә нинди A һәм B нокталары A_1 һәм B_1 нокталарына күчә, биредә $\overrightarrow{AA_1}=\vec{p}$ һәм $\overrightarrow{BB_1}=\vec{p}$. $A_1B_1=AB$ икәнен исбат итәргә кирәк. Өчпочмак кагыйдәсе буенча $\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}$. Икенче



Рәс. 141

яктан, $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1}$ (рәс. 141, *б*). Бу ике тигезлектән табабыз: $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1}$, яки $\vec{p} + \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB} + \vec{p}$, моннан $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB}$. Соңгы тигезлектән $A_1B_1 = AB$ икәнлеге килеп чыга, шуны исбат итәргә кирәк иде дә.

Теләсә нинди хәрәкәттә кисемтә — кисемтәгә, туры — турыга, яссылык яссылыкка күчкәнен исбат итәргә мөмкин (бу — планиметриядәге кебек үк эшләнә). Шулай ук безнең курста фигураларның тигезлеген (2 нче кушымтаны кара) биргәндә кулланылган өстенә салып карау төшенчәсенең хәрәкәт төшенчәсе белән тәңгәл килгәнен, ягъни теләсә нинди салып карауның хәрәкәт икәнен һәм, киресенчә, теләсә нинди хәрәкәтнең салып карау икәнен исбат итәргә мөмкин. Бу раслама планиметриядәге кебек үк исбат ителә.

58* Охшаш үзгәртү

Пространствоның һәр M ноктасы $\overrightarrow{OM_1} = k\overrightarrow{OM}$ булган M_1 ноктасына күчәрлек итеп үзенә чагылдырылуы үзәге O һәм коэффициенты $k \neq 0$ булган үзәкле охшашлык дип атала.

Коэффициенты k булган үзәкле охшашлыкта A һәм B нокталары A_1 һәм B_1 нокталарына күчсә, $\overrightarrow{A_1B_1} = k\overrightarrow{AB}$ икәнен җиңел исбатларга мөмкин (1 нче кушымтаны кара). Аерым алганда, үзәкле охшашлыкта өчпочмак — үзенә охшаш өчпочмакка, O ноктасы аша үтүче яссылык — O ноктасы аша үтмәүче аңа параллель яссылыкка, ә үзәге C булган r радиуслы сфера (ягъни пространствоның C ноктасыннан r ераклыкта урнашкан барлык нокталарыннан торган өслек) үзәге C_1 булган kr радиуслы (ягъни $\overrightarrow{OC_1} = k\overrightarrow{OC}$ булган) сферага күчә. Бу раслауны мөстәкыйль рәвештә исбатлагыз.

Үзәкле охшашлык охшаш үзгәртүнең аерым очрагы булып тора. Яссылыкның теләсә нинди A һәм B нокталары $k \cdot AB = A_1B_1$ булырлык A_1 һәм B_1 нокталарына күчкән үзенә чагылдырылуы $k > 0$ коэффициентлы **охшаш үзгәртү** дип атала. Хәрәкәт (бу вакытта $k = 1$), үзәкле охшашлык, ә шулай ук аларны эзлекле рәвештә башкару нәтиҗәләре охшаш үзгәртү мисаллары икәне күренеп тора.

Киресен раслау да дөрес булып чыга: **теләсә нинди охшаш үзгәртү — хәрәкәт һәм үзәкле охшашлыкны эзлекле башкару** нәтиҗәсе ул.

Моны исбатлыйк. k коэффициентлы охшаш үзгәртүне тикшерик. Ирекле рәвештә алынган A һәм B

нокталары ул вакытта, $A_1B_1 = k \cdot AB$ булырдай, A_1 һәм B_1 нокталарына күчә. Хәзер ирекле рәвештә алынган O үзәкле һәм коэффициенты $\frac{1}{k}$ булган үзәкле охшашлыкны тикшерик. Бу вакытта A_1 һәм B_1 нокталары $A_2B_2 = \frac{A_1B_1}{k}$ булган A_2 һәм B_2 нокталарына күчә. Әлеге охшаш үзгәртү һәм үзәкле охшашлыкны эзлекле рәвештә башкару нәтиҗәсендә, ирекле рәвештә алынган A һәм B нокталары $A_2B_2 = \frac{k \cdot AB}{k} = AB$ булган A_2 һәм B_2 нокталарына күчә. Бу исә әлеге үзгәртүләрне эзлекле рәвештә башкару нәтиҗәсенең хәрәкәт икәнен белдерә. Үз чиратында хәрәкәтне һәм үзәге O, коэффициенты k булган үзәкле охшашлыкны башкару нәтиҗәсендә, ирекле рәвештә алынган A һәм B нокталары охшаш үзгәртүнең башта алынган шул ук A_1 һәм B_1 нокталарына күчә. Ләкин бу — баштагы охшаш үзгәртүнең күрсәтелгән хәрәкәтне һәм үзәге O, коэффициенты k булган үзәкле охшашлыкны эзлекле башкару нәтиҗәсе булуын белдерә. Раслау исбатланды.

Охшаш үзгәртү геометриядә еш кулланыла. Мәсәлән, аның ярдәмендә теләсә нинди җисемнең охшашлык төшенчәсен бирергә мөмкин: әгәр **җисемнәрнең берсе икенчесенә күчә торган охшаш үзгәртү булса, ике җисем охшаш дип атала.**

Мәсьәләләр

478 а) Координаталар башлангычына карата үзәкле симметриядә; б) координаталар күчәрләренә карата күчәрле симметриядә; в) координаталар яссылыкларына карата көзгедәгечә симметриядә A (0; 1; 2), B (3; −1; 4), C (1; 0; −2) нокталары күчкән нокталарның координаталарын табыгыз.

479 Үзәкле симметриядә: а) симметрия үзәге аша үтмәүче туры аңа параллель турыга чагылдырылуын; б) симметрия үзәге аша үтүче туры үзенә чагылдырылуын исбатлагыз.

480 Үзәкле симметриядә: а) симметрия үзәге аша үтмәүче яссылык аңа параллель яссылыкка чагылдырылуын; б) симметрия үзәге аша үтүче яссылык үзенә чагылдырылуын исбат итегез.

481 Күчәрле симметриядә: а) күчәргә параллель туры күчәргә параллель турыга чагылдырылуын; б) күчәр белән φ почмагы төзүче туры күчәр белән шулай ук φ почмагы төзүче турыга чагылдырылуын исбат итегез.

482 Көзгедәгечә симметриядә a турысы a_1 турысына чагылдырыла. a һәм a_1 турылары бер яссылыкта ятканын исбат итегез.

483 α яссылыгына карата көзгедәгечә симметриядә β яссылыгы β_1 яссылыгына чагылдырыла. а) $\beta \parallel \alpha$ булса, ул вакытта $\beta_1 \parallel \alpha$ икәнен;

б) $\beta \perp \alpha$ булса, ул вакытта β_1 белән β ның тәңгәл килгәнен исбат итегез.

484 $\vec{p}$ векторга (биредә $\vec{p} \neq \vec{0}$) параллель күчерүдә: а) $\vec{p}$ векторына параллель булмаган һәм бу векторны эченә алмаган туры аңа параллель турыга чагылдырылуын; б) $\vec{p}$ векторына параллель яки бу векторны эченә алган туры үзенә чагылдырылуын исбатлагыз.

485 $A_1B_1C_1$ өчпочмагы ABC өчпочмагын $\vec{p}$ векторга параллель күчереп табыла. M_1 һәм M нокталары — тиңдәшле рәвештә $A_1B_1C_1$ һәм ABC өчпочмаклары медианаларының кисешү нокталары. $\vec{p}$ векторга параллель күчерүдә M ноктасы M_1 ноктасына күчкәнен исбатлагыз.

486 Хәрәкәттә: а) туры турыга чагылдырылуын; б) яссылык яссылыкка чагылдырылуын исбатлагыз.

487 Хәрәкәттә: а) кисемтә кисемтәгә чагылдырылуын; б) почмак аңа тигез почмакка чагылдырылуын исбатлагыз.

488 Хәрәкәттә: а) параллель турылар параллель турыларга чагылдырылуын; б) параллель яссылыклар параллель яссылыкларга чагылдырылуын исбатлагыз.

489 Хәрәкәттә: а) әйләнә шул ук радиуслы әйләнәгә чагылдырылуын; б) турыпочмаклы параллелепипед үлчәнешләре шундый ук булган турыпочмаклы параллелепипедка чагылдырылуын исбатлагыз.

V бүлеккә сораулар

1 Ноктаның: а) бер координатасы нульгә тигез булса; б) ике координатасы нульгә тигез булса, ул турыпочмаклы координаталар системасына карата ничек урнашкан?

2 Ни өчен Oxy яссылыгына параллель турыда яткан барлык турылар бер үк аппликатага ия икәнен аңлатып бирегез.

3 A (2; 4; 5), B (3; x; y), C (0; 4; z) һәм D (5; t; u) нокталары бирелгән. x, y, z, t һәм u ның нинди кыйммәтләре өчен бу нокталар: а) Oxy яссылыгына параллель яссылыкта; б) Oxz яссылыгына параллель яссылыкта; в) Ox күчәренә параллель турыда ята?

4 $\overrightarrow{AB}\,\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$, $\overrightarrow{BC}\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$ булса, $\overrightarrow{CA}$ векторы нинди координаталарга ия?

5 Нуль булмаган $\vec{a}$ векторының беренче һәм икенче координаталары нульгә тигез. а) Oz; б) Ox; в) Oy күчәренә карата $\vec{a}$ векторы ничек урнашкан?

6 Нуль булмаган $\vec{a}$ векторының беренче координатасы нульгә тигез. $\vec{a}$ векторы: а) Oxz яссылыгына; б) Ox күчәренә карата ничек урнашкан?

7 Векторлар коллинеармы: а) $\vec{a}\{-5;\ 3;\ -1\}$ һәм $\vec{b}\{6;\ -10;\ -2\}$; б) $\vec{a}\{-2;\ 3;\ 7\}$ һәм $\vec{b}\{-1;\ 1{,}5;\ 3{,}5\}$?

8 M ноктасының радиус-векторының озынлыгы 1 гә тигез. M ноктасының абсциссасы: а) 1 гә; б) 2 гә тигез булуы мөмкинме?

9 $\vec{a}$ векторының озынлыгы 3 кә тигез. $\vec{a}$ векторының координаталарының берсе: а) 3 кә; б) 5 кә тигез булуы мөмкинме?

10 M_1 ноктасының абсциссасы 3 кә тигез, ә M_2 ноктасының абсциссасы 6 га тигез. а) M_1M_2 кисемтәсенең озынлыгы 2 гә тигез булуы мөмкинме? б) M_1M_2 кисемтәсенең озынлыгы 3 кә тигез булса, ул Ox күчәренә карата ничек урнашкан?

11 $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторларының озынлыклары a һәм b га тигез. а) $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары бердәй юнәлешле; б) $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары капма-каршы юнәлешле; в) $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары перпендикуляр; г) $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары арасындагы почмак 60°ка тигез; д) $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары арасындагы почмак 120°ка тигез булса, $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторларының скаляр тапкырчыгышы нәрсәгә тигез?

12 Нинди шарт үтәлгәндә, $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторларының скаляр тапкырчыгышы: а) уңай; б) тискәре; в) нульгә тигез була?

13 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы бирелгән. Векторлар перпендикулярмы: а) $\overrightarrow{AD}$ һәм $\overrightarrow{D_1C_1}$; б) $\overrightarrow{BD}$ һәм $\overrightarrow{CC_1}$; в) $\overrightarrow{A_1C_1}$ һәм $\overrightarrow{AD}$; г) $\overrightarrow{DB}$ һәм $\overrightarrow{D_1C_1}$; д) $\overrightarrow{BB}$ һәм $\overrightarrow{AC}$?

14 $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторларының беренче координаталары тиңдәшле рәвештә 1 һәм 2 гә тигез. $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторларының скаляр тапкырчыгышы: а) 2 дән кечерәк; б) 2 гә тигез; в) 2 дән зуррак булуы мөмкинме?

15 Үзәге A ноктасында булган үзәкле симметриядә B (1; 0; 2) ноктасы C (2; −1; 4) ноктасына күчсә, A ноктасы нинди координаталарга ия?

16 Яссылыкка карата көзгедәгечә симметриядә M (2; 1; 3) ноктасы M_1 (2; −2; 3) ноктасына күчсә, бу яссылык Ox һәм Oz координаталар күчәрләренә карата ничек урнашкан?

17 Көзгедәгечә симметриядә (күчәрле симметриядә, үзәкле симметриядә) уң перчатка кайсы перчаткага (уңынамы яки сулынамы) күчә?

Өстәмә мәсьәләләр

490 $\vec{a}\{-5;\ 0;\ 5\}$, $\vec{b}\{-5;\ 5;\ 0\}$ һәм $\vec{c}\{1;\ -2;\ -3\}$ векторлары бирелгән. Векторның координаталарын табыгыз: а) $3\vec{b} - 3\vec{a} + 3\vec{c}$; б) $-0{,}1\vec{c} + 0{,}8\vec{a} - 0{,}5\vec{b}$.

491 Векторлар коллинеармы: а) $\vec{a}\{-5;\ 3;\ -1\}$ һәм $\vec{b}\ \{6;\ -10;\ -2\}$; б) $\vec{a}\{-2;\ 3;\ 7\}$ һәм $\vec{b}\{-1;\ 1{,}5;\ 3{,}5\}$; в) $\vec{a}\left\{-\frac{2}{3};\ \frac{5}{9};\ -1\right\}$ һәм $\vec{b}\ \{6;\ -5;\ 9\}$; г) $\vec{a}\{0{,}7;\ -1{,}2;\ -5{,}2\}$ һәм $\vec{b}\{-2{,}8;\ 4{,}8;\ -20{,}8\}$?

492 $A(-5;\ 7;\ 3)$ һәм $B(3;\ -11;\ 1)$ ноктлары бирелгән. а) Ox күчәрендә AB кисемтәсенең уртасына иң якын ноктаны табыгыз; б) Oy һәм Oz күчәрләрендә шундый ук үзлеккә ия ноктaларны табыгыз.

493 Векторлар компланармы: а) $\vec{a}\{-1;\ 2;\ 3\}$, $\vec{i} + \vec{j}$ һәм $\vec{i} - \vec{k}$; б) $\vec{b}\{2;\ 1;\ 1{,}5\}$, $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ һәм $\vec{i} - \vec{j}$; в) $\vec{a}\{1;\ 1;\ 1\}$, $\vec{b}\{1;\ -1;\ 2\}$ һәм $\vec{c}\{2;\ 3;\ -1\}$?

494 $A\ (3;\ 5;\ 4)$, $B\ (4;\ 6;\ 5)$, $C\ (6;\ -2;\ 1)$ һәм $D\ (5;\ -3;\ 0)$ нокталары бирелгән. $ABCD$ ның параллелограмм икәнен исбатлагыз.

495 $A\ (2;\ 0;\ 1)$, $B\ (3;\ 2;\ 2)$ һәм $C\ (2;\ 3;\ 6)$ нокталары бирелгән. ABC өчпочмагы медианаларының кисешү ноктасының координаталарын табыгыз.

496 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедының дүрт түбәсенең координаталары бирелгән: $A\ (3;\ 0;\ 2)$, $B\ (2;\ 4;\ 5)$, $A_1\ (5;\ 3;\ 1)$, $D\ (7;\ 1;\ 2)$. Калган түбәләренең координаталарын табыгыз.

497 AB кисемтәсенең уртасы Oxy яссылыгында ята. а) $A\ (2;\ 3;\ -1)$, $B\ (5;\ 7;\ k)$; б) $A\ (0;\ 4;\ k)$, $B\ (3;\ -8;\ 2)$; в) $A\ (5;\ 3;\ k)$, $B\ (3;\ -5;\ 3k)$ булса, k ны табыгыз.

498 $\vec{a}\ \{2;\ 1;\ -2\}$ һәм $\vec{b}\{1;\ 3;\ 0\}$ векторлары белән тиңдәшле рәвештә бердәй юнәлешле берәмлек векторларының координаталарын табыгыз.

499 $\vec{a}\ \{x;\ y;\ z\}$ векторының озынлыгы 5 кә тигез. $x = 2$, $z = -\sqrt{5}$ булса, $\vec{a}$ векторының ординатасын табыгыз.

500 $M\ (2;\ -1;\ 3)$, $N\ (-4;\ 1;\ -1)$, $P\ (-3;\ 1;\ 2)$ һәм $Q\ (1;\ 1;\ 0)$ нокталары бирелгән. MN һәм PQ кисемтәләренең урталары арасындагы ераклыкны исәпләп чыгарыгыз.

501 $B\ (-2;\ 5;\ \sqrt{3})$ ноктасыннан координата күчәрләренә кадәр ераклыкны табыгыз.

502 Ординаталар күчәрендә $A\ (13;\ 2;\ -1)$ һәм $B\ (-15;\ 7;\ -18)$ нокталарыннан тигез ераклыктагы ноктаны табыгыз.

503 $A\ (0;\ 2;\ 2)$, $B\ (2;\ 1;\ 1)$, $C\ (2;\ 2;\ 2)$ түбәләре булган өчпочмакны камаучы әйләнә үзәгенең координаталарын табыгыз.

504 ABC өчпочмагының түбәләре α яссылыгыннан бер якта урнашканнар һәм бу яссылыктан 4 дм, 5 дм һәм 9 дм ераклыкта торалар. Өчпочмак медианаларының кисешү ноктасыннан α яссылыгына кадәр ераклыкны табыгыз.

505 Тетраэдрның түбәсен каршы яткан кыры медианаларының кисешү ноктасы белән тоташтыручы кисемтә **тетраэдрның медианасы** дип атала. Тетраэдрның медианалары түбәдән исәпләгәндә һәр медиананы 3:1 чагыштырмасында бүлә торган бер ноктада кисешкәнен исбатлагыз.

506 $\vec{a}\ \{-1;\ 5;\ 3\}$, $\vec{b}\{3;\ 0;\ 2\}$, $\vec{c}\{0,5;\ -3;\ 4\}$ һәм $\vec{d}\{2;\ 1;\ 0\}$ векторлары бирелгән. Исәпләп чыгарыгыз: а) $\vec{a}\,\vec{b}$; б) $\vec{a}\,\vec{c}$; в) $\vec{d}\,\vec{d}$; г) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\vec{d}$; д) $(\vec{a}-\vec{b})\,(\vec{c}-\vec{d})$.

507 $DABC$ тетраэдрында $DA = DB = DC$, $\angle ADB = 45°$, $\angle BDC = 60°$. а) $\overrightarrow{DA}$ һәм $\overrightarrow{BD}$; б) $\overrightarrow{DB}$ һәм $\overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{BD}$ һәм $\overrightarrow{BA}$ векторлары арасындагы почмакны исәпләп чыгарыгыз.

508 $ABCD$ тетраэдрының барлык кабыргалары бер-берсенә тигез, D_1 ноктасы — D ноктасының ABC яссылыгына проекциясе. Түбәндәге векторлар перпендикулярмы: а) $\overrightarrow{D_1B}$ һәм $\overrightarrow{D_1D}$; б) $\overrightarrow{DD_1}$ һәм $\overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{DA}$ һәм $\overrightarrow{BC}$; г) $\overrightarrow{D_1B}$ һәм $\overrightarrow{DC}$?

509 а) A (7; –8; 15), B (8; –7; 13), C (2; –3; 5), D (–1; 0; 4); б) A (8; –2; 3), B (3; –1; 4), C (5; –2; 0), D (7; 0; –2) булса, AB һәм CD турылары арасындагы почмакның косинусын исәпләп чыгарыгыз.

510 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында M ноктасы — BB_1C_1C кырының үзәге. а) $\overrightarrow{A_1D}$ һәм $\overrightarrow{AM}$; б) $\overrightarrow{MD}$ һәм $\overrightarrow{BB_1}$ векторлары арасындагы почмакны исәпләп чыгарыгыз.

511 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедында $\angle BAA_1 = \angle BAD = \angle DAA_1 = 60°$, $AB = AA_1 = AD = 1$. $\overrightarrow{AC_1}$ һәм $\overrightarrow{BD_1}$ векторларының озынлыкларын исәпләп чыгарыгыз.

512 M ноктасының $ABCD$ ромбы яссылыгына проекциясе аның диагональләренең кисешү ноктасы O белән тәңгәл килә. N ноктасы — BC ягының уртасы, $AC = 8$, $DB = MO = 6$. MN турысы белән: а) BC; б) DC; в) AC; г) DB турысы арасындагы почмакның косинусын исәпләп чыгарыгыз.

513 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында M ноктасы BB_1 кабыргасында ята, шуның белән бергә, $BM : MB_1 = 3 : 2$, ә N ноктасы AD кабыргасында ята, шуның белән бергә, $AN : ND = 2 : 3$. MN турысы белән: а) DD_1C_1C; б) $A_1B_1C_1D_1$ кыры яссылыгы арасындагы почмакның синусын исәпләп чыгарыгыз.

514 OA, OB, OC һәм OM нурлары $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 90°$, $\angle AOM = \varphi_1$, $\angle BOM = \varphi_2$, $\angle COM = \varphi_3$ булырлык итеп урнашкан. $\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_3 = 1$ икәнен исбатлагыз.

515 OA, OB һәм OC нурлары $\angle BOC = \angle BOA = 45°$, $\angle AOC = 60°$ булырлык итеп урнашкан. OH турысы AOB яссылыгына перпендикуляр. OH һәм OC турылары арасындагы почмакны табыгыз.

516 φ гә тигез ($\varphi < 90°$) икекырлы $CABD$ почмагы бирелгән. $AC \perp AB$ һәм $\angle DAB = \theta$ икәне билгеле. $\cos \angle CAD$ ын табыгыз.

517 CA һәм DB кисемтәләре $120°$ка тигез булган икекырлы $CABD$ почмагының кабыргасына перпендикуляр. $AB = m$, $CA = n$, $BD = p$ икәне билгеле. CD ны табыгыз.

518 Хәрәкәт вакытында a турысы a_1 турысына, ә α яссылыгы α_1 яссылыгына чагылдырыла. а) $a \parallel \alpha$ булса, ул вакытта $a_1 \parallel \alpha_1$; б) $a \perp \alpha$ булса, ул вакытта $a_1 \perp \alpha_1$ икәнен исбатлагыз.

519 α яссылыгына карата көзгедәгечә симметриядә β яссылыгы β_1 яссылыгына чагылдырыла. Әгәр β яссылыгы α яссылыгы белән φ почмагы төзесә, β_1 яссылыгы да α яссылыгы белән φ почмагы төзегәнен исбатлагыз.

520 $\vec{p}$ векторга параллель күчерү вакытында: а) $\vec{p}$ векторына параллель булмаган һәм бу векторны эченә алмаган яссылык аңа параллель яссылыкка чагылдырылганын; б) $\vec{p}$ векторына параллель яки бу векторны эченә алган яссылык үзенә чагылдырылганын исбатлагыз.

VI бүлек

Цилиндр, конус һәм шар

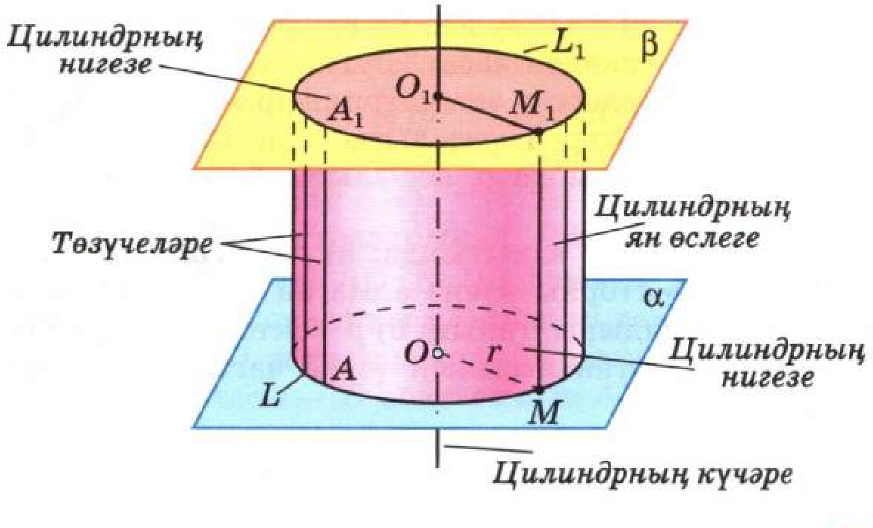
§ 1 Цилиндр

59 Цилиндр төшенчәсе

Ирекле рәвештә алынган α яссылыгын һәм α яссылыгында яткан, радиусы r га тигез булган O үзәкле L әйләнәсен тикшерик. L әйләнәсенең һәр ноктасы аша α яссылыгына перпендикуляр туры үткәрәбез. Бу турылардан төзелгән өслек **цилиндрик өслек** дип, ә турылар үзләре **цилиндрик өслекнең төзүчеләре** дип атала. Барлык төзүчеләр һәм күчәр α яссылыгына перпендикуляр булганга күрә, алар бер-берсенә параллель (16 нчы п. ны карагыз).

Хәзер α яссылыгына параллель β яссылыгын тикшерик (рәс. 142). Төзүчеләрнең α һәм β яссылыклары арасында урнашкан кисемтәләре параллель һәм бер-берсенә тигез (11 нче п. ны карагыз). Төзү буенча бу кисемтәләрнең α яссылыгында урнашкан очлары L әйләнәсен хасил итәләр, ә β яссылыгында урнашкан очлары радиусы r га тигез булган O_1 үзәкле (биредә O_1 — β яссылыгының цилиндрик өслек күчәре белән кисешү ноктасы) L_1 әйләнәсен хасил итә.

Бу расламаның дөреслеге төзүчеләрнең β яссылыгында яткан очлары күплеге L әйләнәсен $\overrightarrow{OO_1}$ векторга күчереп табылуыннан килеп чыга. Параллель



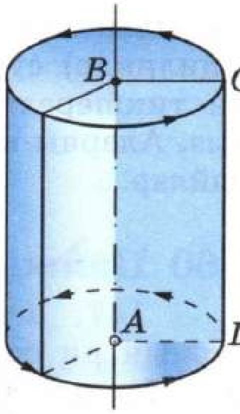
Цилиндр
Рәс. 142

күчерү хәрәкәт була, димәк, шулай ук салып карау да, ә бер урыннан икенче урынга алып салганда, теләсә нинди фигура аңа тигез фигурага күчә. Шулай булгач, $\overrightarrow{OO_1}$ векторга параллель күчерүдә L әйләнәсе радиусы r булган O_1 үзәкле аңа тигез L_1 әйләнәсенә күчә.

Цилиндрик өслек һәм чикләре L һәм L_1 булган ике түгәрәк белән чикләнгән җисем **цилиндр** дип атала (142 нче рәс. карагыз). Түгәрәкләр цилиндрның **нигезләре** дип, төзүчеләрнең нигезләре арасында урнашкан кисемтәләре **цилиндрның төзүчеләре** дип, ә цилиндрик өслекнең алар белән төзелгән кисәге **цилиндрның ян өслеге** дип атала. Цилиндрик өслекнең күчәре **цилиндрның күчәре** дип атала.

Цилиндрның барлык төзүчеләре, α һәм β параллель яссылыклары арасында урнашкан параллель турыларның кисемтәләре буларак, параллель һәм бер-берсенә тигез. Төзүченең озынлыгы **цилиндрның биеклеге** дип, ә нигезнең радиусы **цилиндрның радиусы** дип атала.

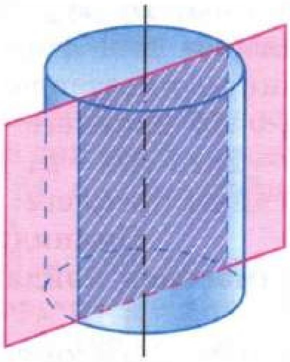
Цилиндр турыпочмаклыкны бер ягы тирәсендә әйләндерү юлы белән табылырга мөмкин. 143 нче рәсемдә $ABCD$ турыпочмаклыгын AB ягы тирәсендә әйләндереп табылган цилиндр сурәтләнгән. Бу вакытта цилиндрның ян өслеге — CD ягын әйләндереп, ә нигезләре BC һәм AD якларын әйләндереп табыла.



Цилиндр $ABCD$ турыпочмаклыгын AB ягы тирәсендә әйләндереп табылган

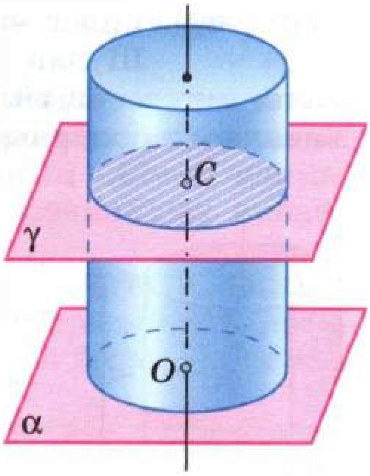
Рәс. 143

Цилиндрның төрле яссылыклар белән кисемнәрен карыйк. Әгәр кисүче яссылык цилиндрның күчәре аша үтсә, кисем — ике ягы цилиндрның төзүчеләре, ә калган ике ягы цилиндрның нигез диаметрлары булган **турыпочмаклыктан** гыйбарәт (рәс. 144). Андый кисем **күчәр кисеме** дип атала.


Цилиндрның күчәр кисеме

Рәс.144

Әгәр дә кисүче яссылык цилиндр күчәренә перпендикуляр булса, кисем дә **түгәрәк** була. Дөрестән дә, әгәр шундый кисүче яссылык булса (145 нче рәсемдә γ яссылыгы), ул без караган цилиндрдан шулай ук цилиндрик булган җисем кисеп ала. Бу цилиндрның нигезләре булып ике түгәрәк хезмәт итә, аларның берсе без тикшергән кисем була да инде.



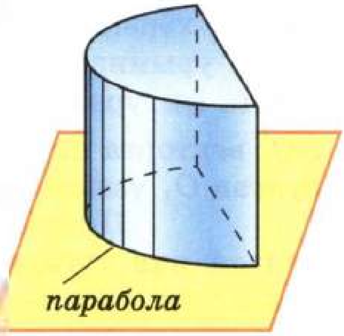
Күчәргә перпендикуляр булган яссылык белән цилиндрның кисеме

Рәс. 145

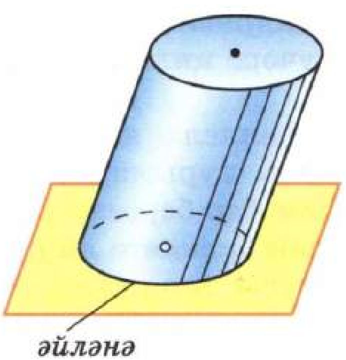
Искәрмә

Тормышта формалары цилиндрдан катлаулырак булган предметлар да очрый. 146, *а* рәсемендә һәр нигезе парабола кисәге һәм кисемтә белән чикләнгән фигурадан торган цилиндр сурәтләнгән. 146, *б* рәсемендә нигезләре түгәрәкләр булган, ләкин төзүчеләре

нигез яссылыгына перпендикуляр булмаган цилиндр (авыш цилиндр) сурәтләнгән. Әмма без киләчәктә бу пунктта тикшерелгәнгә охшаш цилиндрларны гына карарбыз. Аларны кайвакыт **туры түгәрәк цилиндрлар** дип атыйлар.



а)



б)

Рәс. 146

60 Цилиндр өслегенең мәйданы

147, *а* рәсемендә цилиндр сурәтләнгән. Цилиндрның ян өслеге *AB* төзүчесе буйлап киселгән һәм аның барлык төзүчеләре ниндидер α яссылыгында урнашырлык итеп җәелгән дип күз алдына китерик (рәс. 147, *б*). Нәтиҗәдә α яссылыгында $ABB'A'$ турыпочмаклыгы килеп чыгар. Турыпочмаклыкның *AB* һәм $A'B'$ яклары цилиндрның ян өслеген *AB* төзүчесе буенча кискәндә килеп чыккан кисем кырыйлары булып тора. Бу турыпочмаклык **цилиндрның ян өслеге җәелмәсе** дип атала. Турыпочмаклыкның AA' нигезе цилиндр нигезендәге әйләнәнең җәелмәсеннән гыйбарәт, ә *AB* биеклеге — цилиндрның төзүчесе, шуңа күрә $AA' = 2\pi r$, $AB = h$, биредә r — цилиндрның радиусы, h — аның биеклеге.

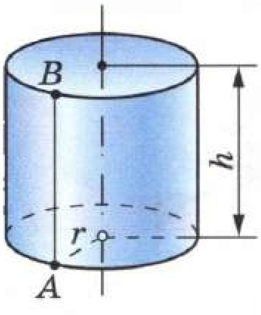
Цилиндрның ян өслеге мәйданы итеп аның җәелмәсенең мәйданы кабул ителә.

$ABB'A'$ турыпочмаклыгының мәйданы $AA' \cdot AB = 2\pi rh$ ка тигез булганлыктан, радиусы r, биеклеге h булган цилиндрның ян өслеге мәйданы $S_{\text{ян}}$ ны исәпләү өчен,

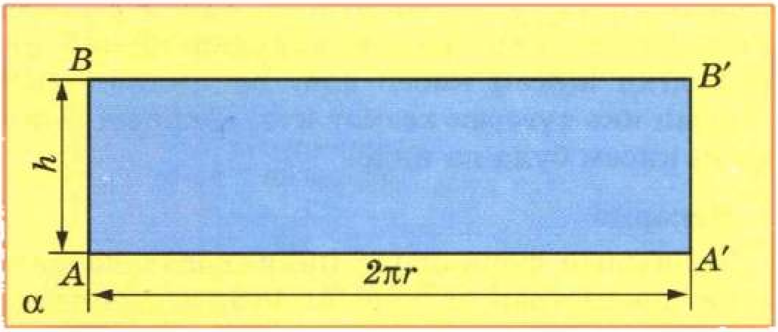
$$S_{\text{ян}} = 2\pi rh$$

формуласы килеп чыга.

Шулай итеп, **цилиндрның ян өслеге мәйданы нигезенең әйләнә озынлыгы белән цилиндрның биеклеге тапкырчыгышына тигез.**



а)



б)

Рәс. 147

Цилиндрның ян өслеге мәйданы белән ике нигезенең мәйданы суммасы **цилиндрның тулы өслеге мәйданы** дип атала. Һәр нигезнең мәйданы πr^2 ка тигез булганлыктан, цилиндрның тулы өслеге мәйданы $S_{цил}$ ны исәпләү өчен,

$$S_{цил} = 2\pi r(r + h)$$

формуласын табабыз.

Мәсьәләләр

521 Цилиндрның күчәр киселеме, капма-каршы ике ягы — төзүчеләр, калган ике ягы цилиндрның нигез диаметрлары булган турыпочмаклыктан гыйбарәт икәнен исбатлагыз. Цилиндрның радиусы 1,5 м, ә биеклеге 4 м булса, күчәр киселеменең диагоналең табыгыз.

522 Цилиндрның күчәр киселеменең диагонале 48 см га тигез. Бу диагональ белән цилиндрның төзүчесе арасындагы почмак 60° ка тигез. Цилиндрның: а) биеклеген; б) радиусын; в) нигез мәйданын табыгыз.

523 Цилиндрның күчәр киселеме — диагонале 20 см га тигез булган квадрат. а) Цилиндрның биеклеген; б) цилиндр нигезенең мәйданын табыгыз.

524 Ике цилиндрның күчәр киселемнәре тигез. Бу цилиндрларның күчәр киселемнәре тигез булса, аларның биеклекләре тигез дип раслау дөресме?

525 Цилиндрның күчәр киселеменең мәйданы 10 м^2 га, ә нигез мәйданы 5 м^2 га тигез. Цилиндрның биеклеген табыгыз.

526 Цилиндрның нигез мәйданы күчәр киселеме мәйданына чагыштырмасы $\sqrt{3}\pi : 4$ кебек була. а) Цилиндрның күчәр киселеме диагонале белән нигез яссылыгы арасындагы почмакны; б) күчәр киселеменең диагональләре арасындагы почмакны табыгыз.

527 AB кисемтәсенең очлары цилиндрның нигез әйләнәләрендә ята. Цилиндрның радиусы r га, биеклеге h ка, ә AB турысы белән цилиндрның күчәре арасындагы ераклык d га тигез. а) $r = 10$ дм, $d = 8$ дм, $AB = 13$ дм булса, h ны; б) $h = 6$ см, $r = 5$ см, $AB = 10$ см булса, d ны табыгыз.

528 Цилиндрны кисүче яссылык цилиндрның күчәренә параллель һәм әлеге яссылык белән цилиндрның күчәре арасындагы ераклык аның радиусыннан кечерәк булса, цилиндрның киселеме капма-каршы яклары аның төзүчеләре булган турыпочмаклык икәнен исбатлагыз.

529 Цилиндрның биеклеге 8 см га, радиусы 5 см га тигез. Цилиндрның күчәренә параллель яссылык белән күчәре арасындагы ераклык 3 см га тигез булса, цилиндрның бу яссылык белән киселеменең мәйданын табыгыз.

530 Цилиндрның биеклеге 12 см га тигез, ә нигез радиусы 10 см га тигез. Цилиндр күчәренә параллель яссылык белән кистерелгән, һәм киселемдә квадрат килеп чыккан. Цилиндрның күчәреннән кисүче яссылыкка кадәр ераклыкны табыгыз.

531 Цилиндрның биеклеге 10 дм га тигез. Цилиндрның күчәренә параллель һәм аннан 9 дм ераклыктагы яссылык белән кистергәндә

килеп чыккан кисем мәйданы 240 дм^2 га тигез. Цилиндрның радиусын табыгыз.

532 Цилиндрның AA_1 төзүчесе аша кисүче ике яссылык үткәрелгән, аның берсе цилиндрның күчәре аша үтә. Цилиндрның бу яссылыклар белән хасил булган кисемнәре арасындагы почмак φ гә тигез булса, аларның мәйданнары чагыштырмасын табыгыз.

533 Цилиндрның биеклеге h ка, ә күчәр кисеме мәйданы S ка тигез. Цилиндр күчәренә параллель яссылык белән кистерелгән. Цилиндрның күчәре белән кисүче яссылык арасындагы ераклык d га тигез булса, кисем мәйданын табыгыз.

534 Цилиндрның күчәренә параллель яссылык нигез әйләнәсеннән 120° лы дуга кисеп ала. Цилиндрның биеклеге h ка, ә цилиндрның күчәре белән кисүче яссылык арасындагы ераклык d га тигез булса, кисем мәйданын табыгыз.

535 Цилиндрның күчәренә параллель яссылык нигез әйләнәсеннән 60° лы дуга кисеп ала. Цилиндрның төзүчесе $10\sqrt{3}$ см га, күчәрдән кисүче яссылыкка кадәр ераклык 2 см га тигез. Кисем мәйданын табыгыз.

536 Цилиндрның төзүчесе аша үзара перпендикуляр ике яссылык үткәрелгән. Килеп чыккан кисемнәрнең һәркайсының мәйданы S ка тигез. Цилиндрның күчәр кисеме мәйданын табыгыз.

537 Цилиндр нигезенең диаметры 1 м га тигез, цилиндрның биеклеге нигез әйләнәсенең озынлыгына тигез. Цилиндрның ян өслеге мәйданын табыгыз.

538 Цилиндрның ян өслеге мәйданы S ка тигез. Цилиндрның күчәр кисеме мәйданын табыгыз.

539 Бер квадрат метрга 200 г буяу сарыф ителсә, нигез диаметры 1,5 м га, биеклеге 3 м га тигез булган цилиндр формасындагы бакны буярга күпме буяу кирәк булыр?

540 Цилиндрның биеклеге аның радиусыннан 12 см га озынрак, ә тулы өслек мәйданы 288π см^2 га тигез. Цилиндрның нигез радиусын һәм биеклеген табыгыз.

541 Озынлыгы 4 м, диаметры 20 см булган торбаны ясау өчен, ничә квадрат метр табаклы калай кирәк? Җөйләргә ян өслек мәйданының 2,5 % ы китә.

542 Цилиндрның төзүчесе һәм күчәр кисеме диагонале арасындагы почмагы φ гә, цилиндр нигезенең мәйданы S ка тигез. Цилиндрның ян өслеге мәйданын табыгыз.

543 Цилиндрның ян өслеге җәелмәсенең диагональләре арасындагы почмагы φ гә, диагонале d га тигез. Цилиндрның ян өслеген һәм тулы өслеген табыгыз.

544 Диагонале d га тигез булган квадраттан цилиндрның ян өслеге төрелгән. Цилиндрның нигезе мәйданын табыгыз.

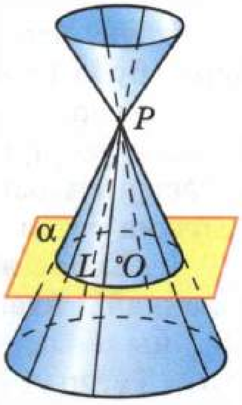
545 Цилиндр ягы a га тигез квадратны аның бер ягы тирәсендә әйләндереп табылган. а) Цилиндрның күчәре кисеме; б) цилиндрның ян өслеге; в) цилиндрның тулы өслеге мәйданын табыгыз.

546 Бер цилиндр — $ABCD$ турыпочмаклыгын пространствода AB турысы тирәсендә әйләндереп, ә икенче цилиндр шул ук турыпочмаклыкны BC турысы тирәсендә әйләндереп табылган. а) Бу цилиндрның ян өслекләренең мәйданнары тигез икәнен исбатлагыз. б) $AB = a$, $BC = b$ булса, бу цилиндрларның тулы өслеге мәйданнары чагыштырмасын табыгыз.

§ 2 Конус

61 Конус төшенчәсе

Үзәге O булган L әйләнәсен һәм бу әйләнәнең α яссылыгына перпендикуляр OP турысын тикшерик. P ноктасы һәм әйләнәнең һәр ноктасы аша туры үткәрәбез. Бу турылардан төзелгән өслек **коник** өслек дип (рәс. 148), ә бу турылар үзләре **коник өслекнең төзүчеләре** дип атала. P ноктасы коник өслекнең **түбәсе** дип, ә OP турысы **күчәре** дип атала.

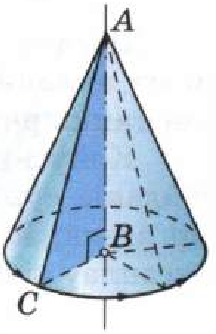


Рәс. 148

Коник өслек һәм чиге L булган түгәрәк белән чикләнгән җисем **конус** дип атала (рәс. 149). Түгәрәк — **конусның нигезе,** коник өслекнең түбәсе — **конусның түбәсе,** төзүчеләрнең түбә белән нигез арасындагы кисемтәләре — **конусның төзүчеләре,** ә коник өслекнең алар белән төзелгән кисәге **конусның ян өслеге** дип атала. Коник өслекнең күчәре **конусның күчәре** дип, ә аның түбә белән нигез арасындагы кисемтәсе **конусның биеклеге** дип атала. Конусның барлык төзүчеләре бер-берсенә тигез икәнен искәртеп китәбез (ни өчен икәнен аңлатыгыз).

Рәс. 149

Конусны турыпочмаклы өчпочмакны бер катеты тирәсендә әйләндереп табарга мөмкин. 150 нче рәсемдә турыпочмаклы ABC өчпочмагын AB катеты тирәсендә әйләндереп табылган конус сурәтләнгән. Бу вакытта ян өслек — AC гипотенузасын, ә нигезе BC катетын әйләндергәндә барлыкка килә.

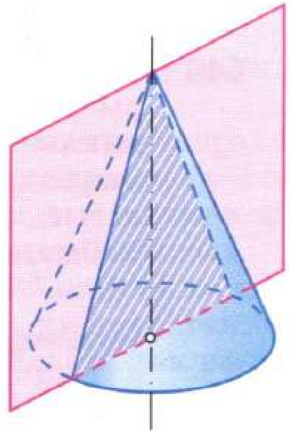


Рәс. 150

Конусның төрле яссылыклар белән кисемен карыйк. Кисүче яссылык конусның күчәре аша үтсә (рәс. 151), кисем тигезьянлы өчпочмак була, аның нигезе — конус нигезенең диаметры, ә ян-яклары конусның төзүчеләре була. Бу кисем **күчәр кисеме** дип атала.

Кисүче яссылык конусның OP күчәренә перпендикуляр булса (рәс. 152), конусның кисеме O_1

үзәге конус күчәрендә яткан **түгәрәктән** гыйбарәт. Бу түгәрәкнең радиусы $r_1 = \frac{PO_1}{PO} r$ (биредә r — конус нигезенең радиусы) икәнен POM һәм PO_1M_1 турыпочмаклы өчпочмакларының охшашлыгыннан җиңел чыгарып була. Бу фактны исбатлау 556 нчы мәсьәләнең чишелешендә китерелгән.



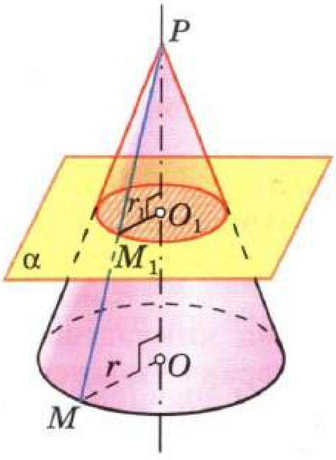
Конусның күчәр кисеме
Рәс. 151

62 Конус өслегенең мәйданы

Конусның ян өслеген, цилиндрның ян өслеге кебек үк, бер төзүчесе буйлап кисеп, яссылыкта җәяргә була (рәс. 153, *а*, *б*). Конусның ян өслеге җәелмәсе түгәрәк секторыннан гыйбарәт (153, *б* рәс. кара), аның радиусы — конусның төзүчесенә, ә сектор дугасының озынлыгы конус нигезенең әйләнә озынлыгына тигез.

Конус җәелмәсенең өслеге аның ян өслегенең мәйданы итеп алына. Конусның ян өслеге мәйданы $S_{ян}$ ны аның төзүчесе l һәм нигез радиусы r аша күрсәтик. Түгәрәк секторының мәйданы — конусның ян өслеге җәелмәсе (153, *б* рәсемен кара) — $\frac{\pi l^2}{360}\alpha$ га тигез (биредә α — ABA' дугасының градуслы үлчәме), шуңа күрә

$$S_{ян} = \frac{\pi l^2}{360}\alpha. \qquad (1)$$



Конусның күчәренә перпендикуляр үткән яссылык хасил иткән кисеме — үзәге O_1 һәм радиусы $r_1 = \frac{PO_1}{PO} r$ булган түгәрәк
Рәс. 152

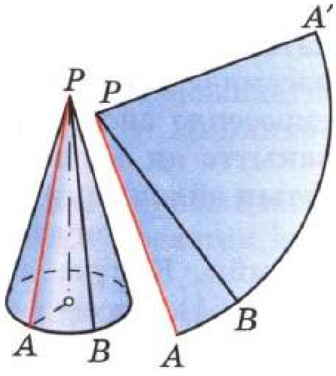
α ны l һәм r аша күрсәтик. ABA' дугасының озынлыгы $2\pi r$ га (конус нигезенең әйләнә озынлыгына) тигез булганлыктан, $2\pi r = \frac{\pi l}{180}\alpha$, моннан $\alpha = \frac{360 r}{l}$. Бу аңлатманы (1) формуласына куеп табабыз:

$$S_{ян} = \pi r l. \qquad (2)$$

Шулай итеп, **конусның ян өслеге мәйданы нигез әйләнәсе озынлыгының яртысы белән төзүченең тапкырчыгышына тигез.**

Конусның ян өслеге мәйданы белән нигезенең мәйданы суммасы аның **тулы өслегенең мәйданы** дип атала. Конусның тулы өслегенең мәйданы $S_{кон}$ ны исәпләү өчен, түбәндәге формула табыла:

$$S_{кон} = \pi r(l + r).$$



а) *б)*
Рәс. 153

63 Кисек конус

Нинди дә булса бер конус алыйк та, күчәренә перпендикуляр итеп, кисүче яссылык үткәрик. Бу яссылык, конус белән түгәрәк буенча кисешеп, конусны ике кисәккә бүлә. Аның бер кисәге (154 нче рәсемдә өске кисәге) конус була, ә икенче кисәге **кисек конус** дип атала. Башта бирелгән конусның нигезе белән конусны яссылык белән кистерүдән килеп чыккан түгәрәк кисек конусның **нигезләре** дип, ә аларның үзәкләрен тоташтыручы кисемтә кисек конусның **биеклеге** дип атала.

Коник өслекнең кисек конусны чикләүче кисәге аның **ян өслеге** дип, ә нигезләре арасында урнашкан коник өслекне төзүче кисемтәләр кисек конусның **төзүчеләре** дип атала. Кисек конусның барлык төзүчеләре бер-берсенә тигез (моны мөстәкыйль рәвештә исбатлагыз).

Турыпочмаклы трапецияне нигезенә перпендикуляр ян-ягы тирәсендә әйләндереп, кисек конусны табарга мөмкин. 155 нче рәсемдә турыпочмаклы $ABCD$ трапециясен AD һәм BC нигезләренә перпендикуляр булган CD ягы тирәсендә әйләндереп табылган кисек конус сурәтләнгән. Биредә AB ян-ягын әйләндереп — ян өслек, ә трапециянең CB һәм DA нигезләрен әйләндереп, кисек конусның нигезләре табыла.

Кисек конусның ян өслеге мәйданы нигез әйләнәләре озынлыкларының ярымсуммасы белән төзүчесенең тапкырчыгышына тигез, ягъни

$$S_{ян} = \pi (r + r_1)\, l,$$

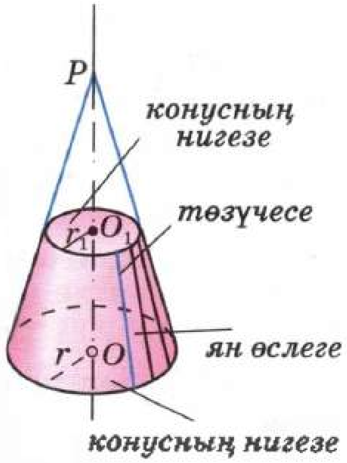
биредә r һәм r_1 — нигез радиуслары, l — кисек конусның төзүчесе.

▼ P — кисек конус табылган конусның түбәсе, AA_1 — кисек конусның бер төзүчесе, $r > r_1$, O һәм O_1 нигезләренең үзәкләре булсын (рәс. 156). (2) формуласыннан файдаланып табабыз:

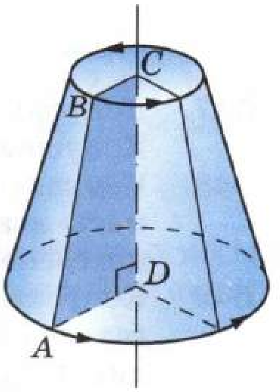
$$S_{ян} = \pi r \cdot PA - \pi r_1 \cdot PA_1 =$$
$$= \pi r (PA_1 + AA_1) - \pi r_1 \cdot PA_1.$$

Моннан $AA_1 = l$ икәнен искә алып табабыз:

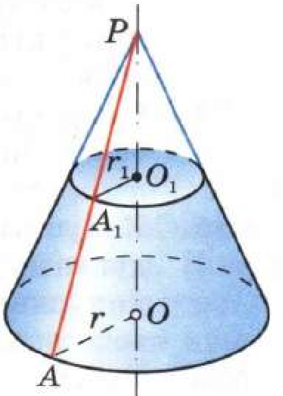
$$S_{ян} = \pi r l + \pi (r - r_1) PA_1. \qquad (3)$$



Кисек конус
Рәс. 154



Кисек конус турыпочмаклы $ABCD$ трапециясен CD ягы тирәсендә әйләндереп табылган
Рәс. 155



Рәс. 156

PA_1 не l, r һәм r_1 аша күрсәтәбез. Турыпочмаклы PO_1A_1 һәм POA өчпочмаклары охшаш, чөнки кысынкы P почмагы уртак, шуңа күрә

$$\frac{PA_1}{PA} = \frac{r_1}{r}, \text{ яки } \frac{PA_1}{PA_1 + l} = \frac{r_1}{r}.$$

Моннан

$$PA_1 = \frac{lr_1}{r - r_1}$$

икәнлеге килеп чыга. Бу аңлатманы (3) формуласына куеп,

$$S_{ян} = \pi(r + r_1)\,l$$

формуласы табыла. △

Мәсьәләләр

547 Конусның биеклеге 15 см га, ә нигезенең радиусы 8 см га тигез. Конусның төзүчесен табыгыз.

548 Конусның 12 см га тигез булган төзүчесе нигез яссылыгына α почмагы ясап авышкан. а) $\alpha = 30°$; б) $\alpha = 45°$; в) $\alpha = 60°$ булса, конус нигезенең мәйданын табыгыз.

549 Конусның биеклеге 8 дм га тигез. Конусның кисем мәйданы: а) нигез мәйданының яртысына; б) нигез мәйданының дүрттән беренә тигез булсын өчен, конусның нигезенә параллель яссылыкны аның түбәсеннән нинди ераклыкта үткәрергә кирәк?

550 Конусның күчәр кисеме — турыпочмаклы өчпочмак. Конусның нигез радиусы 5 см га тигез булса, бу кисемнең мәйданын табыгыз.

551 Конусның күчәр кисеме — ягы $2r$ булган төзек өчпочмак. Конусның үзара: а) 30°; б) 45°; в) 60° лы почмак ясаучы ике төзүчесе аша үткәрелгән кисеменең мәйданын табыгыз.

552 Конусның биеклеге h ка, ә биеклеге белән төзүчесе арасындагы почмагы 60° ка тигез. Конусның үзара перпендикуляр ике төзүчесе аша үткәрелгән яссылык белән кисеменең мәйданын табыгыз.

553 Конусның күчәр кисеменең мәйданы 6 дм^2 га, ә нигез мәйданы 8 дм^2 га тигез булса, конусның биеклеген табыгыз.

554 Конусның төзүчесе l га, ә нигез радиусы r га тигез. Конусның түбәсе һәм: а) 60° лы; б) 90° лы дуганы тартып торучы нигез хордасы аша үтүче кисем мәйданын табыгыз.

555 Конусның биеклеге 10 см га тигез. Конусның түбәсе һәм 60° лы дуганы тартып торучы нигез хордасы аша үткәрелгән яссылык конусның нигез яссылыгы белән: а) 30°; б) 45°; в) 60° лы почмак төзесә, кисем мәйданын табыгыз.

556 Түбәсе P булган конусның нигезе үзәге O булган r радиуслы түгәрәктән гыйбарәт. Кисүче α яссылыгы конус күчәренә перпендикуляр булса, конусның кисеме үзәге O_1 булган r_1 радиуслы

түгәрәк икәнен исбатлагыз, биредә O_1 ноктасы — α яссылыгының PO күчәре белән кисешү ноктасы, ә $r_1 = \frac{PO_1}{PO} r$ (152 нче рәс. кара).

Чишү

Башта α яссылыгындагы үзәге O_1 булган r_1 радиуслы әйләнәдә ятучы M_1 ноктасы конусның кайсыдыр төзүчесендә ятканын, ягъни тикшерелә торган кисем ноктасы икәнен исбатлыйк. PM_1 нурының конусның нигез яссылыгы белән кисешү ноктасын M хәрефе белән тамгалыйбыз. Турыпочмаклы PO_1M_1 һәм POM өчпочмакларының охшашлыгыннан (алар охшаш, чөнки кысынкы P почмагы уртак) табабыз: $OM = \frac{PO}{PO_1} \cdot O_1M_1 = \frac{PO}{PO_1} r_1 = r$, ягъни M ноктасы конус нигезендәге әйләнәдә ята. Шулай булгач, M_1 ноктасы яткан PM кисемтәсе конусның төзүчесе була.

Хәзер α яссылыгында да, шулай ук конусның ян өслегендә дә яткан теләсә кинди M_1 ноктасы үзәге O_1 булган r_1 радиуслы әйләнәдә ятканын исбатларбыз. Дөрестән дә, PO_1M_1 һәм POM өчпочмакларының охшашлыгыннан (PM — M_1 ноктасы аша үтүче төзүче) табабыз: $O_1M_1 = \frac{PO_1}{PO} \cdot OM = \frac{PO_1}{PO} r = r_1$. Шулай итеп, үзәге O_1 булган r_1 радиуслы әйләнә конусның ян өслегенең α яссылыгы белән кисеме була, шуңа күрә әлеге әйләнә чиге булган түгәрәк конусның α яссылыгы белән кисеме була да.

557 Кисүче ике яссылык конус күчәренә перпендикуляр. Конусның бу яссылыклар белән кисем мәйданнары чагыштырмасы конусның түбәсеннән бу яссылыкларга кадәр ераклыкларның квадратлары чагыштырмасына тигез икәнен исбатлагыз.

558 Конусның ян өслеге җәелмәсе α дугалы сектор була. Конусның биеклеге 4 см га, ә нигез радиусы 3 см га тигез булса, α ны табыгыз.

559 Конусның төзүчесе нигез яссылыгы белән 60° лы почмак төзесә, конусның ян өслегенең җәелмәсе булган сектор дугасын табыгыз.

560 Конусның ян өслеге җәелмәсенең дугасы: а) 180°; б) 90°; в) 60° ка тигез сектор булса, аның күчәр кисеменең түбә янындагы почмагын табыгыз.

561 Әгәр конусның ян өслеге җәелмәсенең радиусы 9 см га, ә дугасы 120° ка тигез сектор булса, конусның биеклеген һәм нигез мәйданын исәпләп чыгарыгыз.

562 Конусның төзүчесе белән күчәре арасындагы почмак 45° ка, төзүчесе 6,5 см га тигез. Конусның ян өслеге мәйданын табыгыз.

563 Конусның күчәр кисеменең мәйданы 0,6 см^2 га тигез. Конусның биеклеге 1,2 см. Конусның тулы өслеге мәйданын табыгыз.

564 Конусның төзүчесе нигез яссылыгына φ почмагы ясап авышкан. Конусның нигезенә бер ягы a га, ә каршы яткан почмагы α га тигез булган өчпочмак камалган. Конусның тулы өслеге мәйданын табыгыз.

565 Катетлары 6 см га һәм 8 см га тигез булган турыпочмаклы өчпочмак кечерәк катеты тирәсендә әйләнә. Шушы әйләнү нәтиҗәсендә барлыкка килгән конусның ян һәм тулы өслеге мәйданнарын исәпләп чыгарыгыз.

566 Ян-ягы m га, ә нигез янындагы почмагы φ гә тигез булган тигезьянлы өчпочмак нигезе тирәсендә әйләнә. Өчпочмак әйләнгәндә килеп чыккан җисемнең мәйданын табыгыз.

567 Кисек конус нигезләренең радиуслары 3 см һәм 6 см га, ә биеклеге 4 см га тигез булса, аның төзүчесен табыгыз.

568 Кисек конус нигезләренең радиуслары 5 см һәм 11 см га, ә төзүчесе 10 см га тигез. а) Кисек конусның биеклеген; б) күчәр кисеменең мәйданын табыгыз.

569 Кисек конус нигезләренең радиуслары R һәм r га тигез (биредә $R > r$), ә төзүчесе нигез яссылыгы белән 45° лы почмак төзи. Күчәр кисеменең мәйданын табыгыз.

570 Конусның ян өслеге мәйданы 80 $см^2$ га тигез. Конус биеклегенең уртасы аша биеклегенә перпендикуляр яссылык үткәрелгән. Бу вакытта барлыкка килгән кисек конусның ян өслеге мәйданын табыгыз.

571 $\angle A = 90°$, $\angle D = 45°$, $BC = 4$ см, $CD = 3\sqrt{2}$ см булган $ABCD$ трапециясе бирелгән. Әлеге трапецияне AB ягы тирәсендә әйләндереп табылган кисек конусның ян һәм тулы өслекләрен исәпләп чыгарыгыз.

572 Чиләк нигезләренең радиуслары 15 см һәм 10 см га, төзүчесе 30 см га тигез булган кисек конус формасында. 1 $м^2$ га 150 г буяу тотылса, шундый 100 чиләкнең ике ягын да буяр өчен, күпме буяу кирәк? (Чиләк калаеның калынлыгын исәпкә алмаска.)

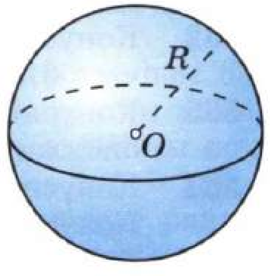
§3 Сфера

64 Сфера һәм шар

Пространствоның бирелгән ноктадан билгеле бер ераклыктагы барлык нокталардан торган өслеге сфера дип атала (рәс. 157).

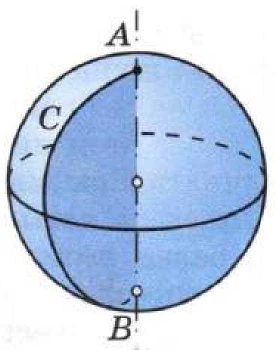
Бирелгән нокта — **сфераның үзәге** (157 нче рәсемдә O ноктасы), ә билгеле дип исәпләнгән ераклык **сфераның радиусы** дип атала. Сфераның радиусын еш кына R хәрефе белән тамгалыйлар.

Сфераның үзәген һәм нинди дә булса ноктасын тоташтыручы теләсә нинди кисемтә шулай ук сфераның радиусы дип атала. Сфераның ике ноктасын тоташтыручы һәм аның үзәге аша үтүче кисемтә **сфераның диаметры** дип атала. Сфераның диаметры $2R$ га тигез икәнлеге ачык күренә. Сфераны ярымәйләнәне аның диаметры тирәсендә әйләндереп табарга мөмкин икәнен әйтеп китәбез (рәс. 158).



Рәс. 157

Сфера белән чикләнгән җисем **шар** дип атала. Сфераның үзәге, радиусы, диаметры шулай ук **шарның үзәге, радиусы, диаметры** дип атала. Радиусы R булган O үзәкле шар пространствоның O ноктасыннан R дан зур булмаган ераклыктагы барлык нокталарын эченә алганлыгы (O ны да кертеп) һәм башка нокталарны эченә алмаганлыгы үзеннән-үзе аңлашыла.



ACB ярымәйләнәсен AB диаметры тирәсендә әйләндереп табылган сфера
Рәс. 158

65 Сфера тигезләмәсе

Үзәге $C(x_0; y_0; z_0)$ булган R радиуслы сфераның тигезләмәсен чыгарыйк (рәс. 159).

Ирекле рәвештә алынган $M(x; y; z)$ ноктасыннан C ноктасына кадәр ераклык

$$MC = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

формуласы буенча исәпләп чыгарыла. Әгәр M ноктасы бирелгән сферада ятса, ул вакытта $MC = R$ яки $MC^2 = R^2$, ягъни M ноктасының координаталары

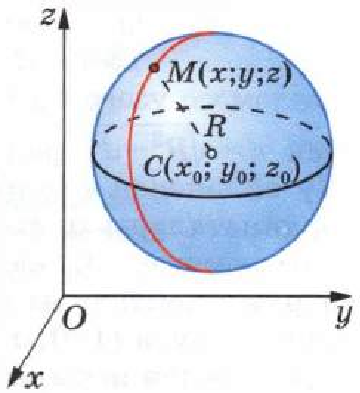
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 \qquad (1)$$

тигезләмәсен канәгатьләндерә.

Әгәр дә $M(x; y; z)$ ноктасы бирелгән сферада ятмаса, ул вакытта $MC^2 \neq R^2$, ягъни M ноктасының координаталары (1) тигезләмәсен канәгатьләндерми. Шулай булгач, **турыпочмаклы координаталар системасында үзәге $C(x_0; y_0; z_0)$ булган R радиуслы сфераның тигезләмәсе**

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

рәвешендә була.



Рәс. 159

66 Сфера белән яссылыкның үзара торышы

Сфера белән яссылыкның үзара торышын сфераның радиусына һәм яссылыктан сфера үзәгенә кадәрге ераклык арасындагы чагыштырмага бәйле рәвештә тикшерик.

Сфераның радиусын — R хәрефе белән, ә сфера үзәгеннән α яссылыгына кадәрге ераклыкны d хәрефе белән тамгалыйк. Координаталар системасын 160 нчы рәсемдә күрсәтелгәнчә бирик: Oxy яссылыгы α яссылыгы белән тәңгәл килә, ә сфераның C үзәге уңай Oz ярымкүчәрендә ята. Бу координаталар системасында C ноктасының координаталары $(0; 0; d)$ була, шуңа күрә $x^2 + y^2 + (z - d)^2 = R^2$ — әлеге сфераның тигезләмәсе.

α яссылыгы координаталар яссылыгы Oxy белән тәңгәл килә, һәм шуңа күрә аның тигезләмәсе $z = 0$ рәвешендә була (ни өчен икәнен аңлатыгыз).

Әгәр нинди дә булса $M(x; y; z)$ ноктасының координаталары ике тигезләмәне дә канәгатьләндерсә, M ноктасы α яссылыгында да, сферада да ята, ягъни сфера белән яссылыкның уртак нокталары була. Әгәр бу ике тигезләмәләр системасының чишелеше булмаса, сфера белән яссылыкның уртак нокталары булмый. Шул рәвешле, сфера белән яссылыкның үзара торышы турындагы мәсьәлә

$$\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 + (z - d)^2 = R^2 \end{cases}$$

тигезләмәләр системасын тикшерүгә кайтарып калдырыла.

$z = 0$ не икенче тигезләмәгә куеп табабыз:

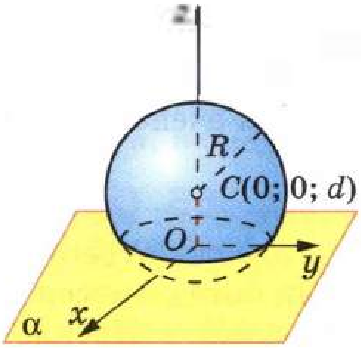
$$x^2 + y^2 = R^2 - d^2. \qquad (2)$$

Өч очрак булуы мөмкин.

1) $d < R$. Ул вакытта $R^2 - d^2 > 0$, һәм (2) тигезләмәсе үзәге Oxy яссылыгындагы O ноктасында булган $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ радиуслы әйләнәнең тигезләмәсе була. Бу әйләнәнең теләсә кайсы $M\,(x; y; 0)$ ноктасының координаталары α яссылыгы тигезләмәсен дә һәм сфера тигезләмәсен дә канәгатьләндерә, ягъни бу әйләнәнең барлык нокталары яссылык белән сфераның уртак нокталары була (160, *а* рәс. кара). Шулай итеп, бу очракта сфера белән яссылык әйләнә буенча кисешәләр. Димәк, **әгәр сфера үзәгеннән яссылыкка кадәр ераклык сфераның радиусыннан кечерәк булса, сфераның яссылык белән кисеме әйләнә була.**

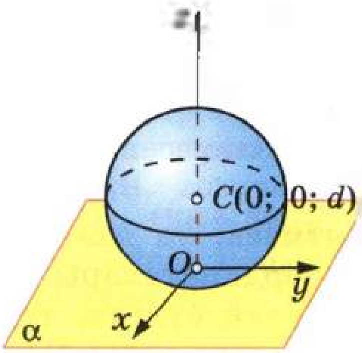
Шарның яссылык белән кисеме түгәрәк икәнлеге ачык аңлашыла. Әгәр кисүче яссылык шарның үзәге аша үтсә, ул вакытта $d = 0$ һәм кисемдә R радиуслы түгәрәк, ягъни радиусы шар радиусына тигез түгәрәк килеп чыга. Андый түгәрәк **шарның зур түгәрәге** дип атала (рәс. 161). Әгәр кисүче яссылык шар үзәге аша үтмәсә, ул вакытта $d > 0$, һәм кисем радиусы $r = \sqrt{R^2 - d^2}$, билгеле, шар радиусыннан кечерәк була (160, *а* рәс. кара).

2) $d = R$. Ул вакытта $R^2 - d^2 = 0$, һәм (2) тигезләмәсен бары тик $x = 0$, $y = 0$ кыйммәтләре генә канәгатьләндерә. Шулай булгач, бары тик $O(0; 0; 0)$ ноктасының координаталары гына ике тигезләмәне дә канәгатьләндерә, ягъни O — сфера белән яссылыкның



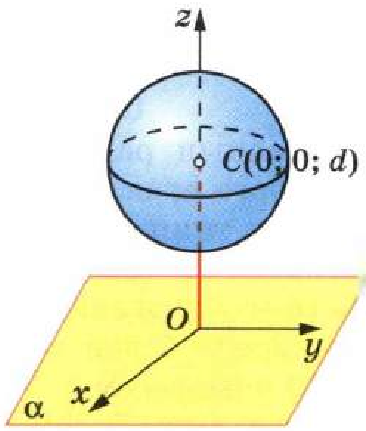
$d < R$, $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

а)



$d = R$

б)



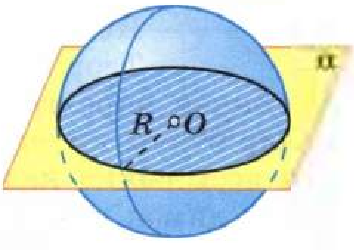
$d > R$

в)

Рәс. 160

бердәнбер уртак ноктасы (160, *б* рәс. кара). Шулай итеп, **әгәр сфераның үзәгеннән яссылыкка кадәр ераклык сфераның радиусына тигез булса, сфера белән яссылыкның бер генә уртак ноктасы була.**

3) $d > R$. Ул вакытта $R^2 - d^2 < 0$, һәм (2) тигезләмәсен берникди дә ноктаның координаталары канәгатьләндерми. Шулай булгач, **әгәр сфера үзәгеннән яссылыкка кадәрге ераклык сфераның радиусыннан зуррак булса, сфера белән яссылыкның уртак нокталары булмый** (160, *в* рәс. кара).

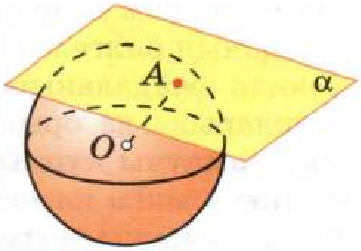


Рәс. 161

67 Сферага орынма яссылык

Сфера белән яссылыкның бер генә уртак ноктасы булган очракны җентекләбрәк тикшерик. Сфера белән бер генә уртак ноктасы булган яссылык **сферага орынма яссылык** дип, ә аларның уртак ноктасы яссылыкның сфера белән **орыну ноктасы** дип атала.

162 нче рәсемдә α яссылыгы — үзәге O булган сферага орынма, A — орыну ноктасы. Сферага орынма яссылык әйләнәгә орынма үзлекләренә аналогик үзлекләргә ия. Ул түбәндәге теоремада аңлатып бирелгән.



Рәс. 162

Теорема

Сфераның яссылык белән орыну ноктасына үткәрелгән радиусы орынма яссылыкка перпендикуляр була.

Исбатлау

Үзәге O булган сферага A ноктасында орынучы α яссылыгын тикшерик (рәс. 162). $OA \perp \alpha$ икәнен исбатлыйк.

OA радиусы α яссылыгына перпендикуляр түгел дип уйлыйк. Ул вакытта OA радиусы α яссылыгына авышма була, шулай булгач, сфераның үзәгеннән α яссылыгына кадәр ераклык сфераның радиусыннан кечерәк. Шуңа күрә сфера белән яссылык әйләнә буйлап кисешәләр. Ләкин бу α яссылыгының орынма булуына, ягъни сфера белән α яссылыгының бер генә уртак ноктасы булуга каршы килә. Килеп чыккан каршылык $OA \perp \alpha$ икәнен исбатлый. Теорема исбатланды.

Кире теореманы исбатлыйк.

Теорема

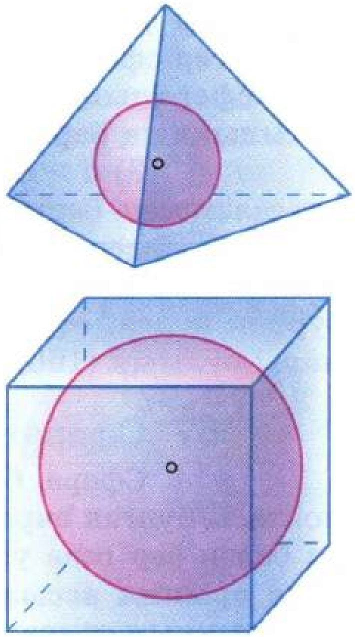
Әгәр сфераның радиусы аның сферада яткан очы аша үтүче яссылыкка перпендикуляр булса, бу яссылык сферага орынма була.

Исбатлау

Теореманың шартыннан радиус сфераның үзәгеннән бирелгән яссылыкка үткәрелгән перпендикуляр булуы килеп чыга. Шуңа күрә сфераның үзәгеннән яссылыкка кадәрге ераклык сфераның радиусына тигез, димәк, сфера белән яссылык бер генә уртак ноктага ия. Бу бирелгән яссылык сферага орынма икәнен белдерә. Теорема исбатланды.

68 Сфераның мәйданы

Цилиндр яки конусның ян өслегеннән аермалы буларак, сфераны яссылыкта җәеп салып булмый, шулай булгач, аның өслек мәйданын җәелмә ярдәмендә билгеләү һәм исәпләп чыгару мөмкин түгел. Сфераның мәйданын билгеләү өчен, камаучы күппочмак төшенчәсеннән файдаланырбыз. Сфера күпкырлыкның барлык кырларына да орынса*, ул күпкырлык сфераны (шарны) **камаучы күпкырлык** дип атала. Бу вакытта сфера **күпкырлыкка камаулы** дип атала. 163 нче рәсемдә сфераны камаучы тетраэдр һәм куб сурәтләнгән.



Рәс. 163

Сфераны камаучы күпкырлыкларның эзлеклелеген тикшерик. Камаучы күпкырлыкның һәр кырының иң зур үлчәме** нульгә омтылырлык итеп, n ны чикләнмәгән рәвештә арттырабыз.

Сфераны камаучы күпкырлыкның һәр кырының иң зур үлчәме нульгә омтылганда, әлеге күпкырлыкның өслек мәйданнары эзлеклелегенең чикләмәсен **сфераның мәйданы** итеп кабул итәрбез. 84 нче пунктта бу чикләмәнең, чыннан да, барлыгын исбат итеп, R радиуслы сфераның мәйданын исәпләү өчен, түбәндәге формуланы табарбыз:

$$S = 4\pi R^2.$$

69* Сфера һәм турының үзара торышы

O үзәкле сфераның һәм a турысының сфераның радиусы R белән сфера үзәгеннән a турысына кадәрге d ераклыгына бәйле рәвештә үзара торышын тикшерик.

Сфера үзәге һәм a турысы аша α яссылыгын үткәрик (сфераның үзәге a турысында ятса, α яссы-

* Күпкырлык кырының яссылыгы сферага орынса һәм орыну ноктасы кырныкы булса, сфера күпкырлыкның кырына орына, диләр.

** Кырның иң зур үлчәме дип кырның ике ноктасы арасындагы иң зур ераклык атала. Мәсәлән, кыр турыпочмаклык булса, аның иң зур үлчәме диагональгә тигез була.

лыгы сыйфатында a турысы аша үтүче теләсә нинди яссылыкны алабыз). Ул сфераны радиусы R булган O үзәкле L әйләнәсе буенча кисеп үтә. Сфераның һәм a турысының уртак нокталары (әгәр алар булса) α яссылыгында һәм, димәк, L әйләнәсендә яталар. Өч очрак булуы мөмкин.

1. $d > R$. Бу очракта L әйләнәсенең һәм a турысының уртак нокталары булмый, шуңа күрә сфераның һәм a турысының уртак нокталары булмый (рәс. 164, *а*).

2. $d = R$. Бу очракта L әйләнәсенең һәм a турысының төгәл уртак бер ноктасы була, шуңа күрә сфераның һәм a турысының шулай ук төгәл бер уртак ноктасы була (рәс. 164, *б*).

3. $d < R$. Бу очракта L әйләнәсенең һәм a турысының шулай ук ике уртак ноктасы була, шуңа күрә сфераның һәм a турысының төгәл ике ноктасы була (рәс. 164, *в*).

Сфера белән төгәл бер уртак ноктасы булган туры **сферага орынма** дип, ә уртак нокта туры белән сфераның **орыну ноктасы** дип атала.

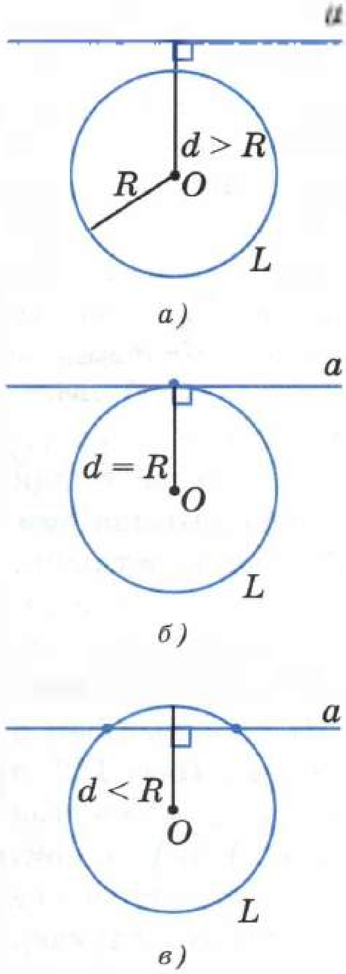
Үзлегегездән исбатлагыз:

сфераның һәм турының орыну ноктасына үткәрелгән сфераның радиусы бу турыга перпендикуляр була;

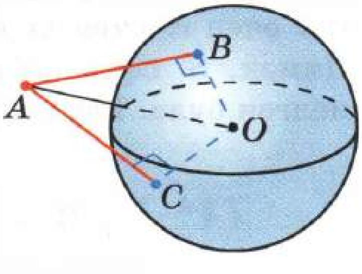
сфераның радиусы аның очы аша үтүче сферада яткан турыга перпендикуляр булса, бу туры сферага орынма була.

Хәзер O үзәкле сферага A ноктасы аша үтүче һәм сферага B һәм C нокталарында орынучы ике орынманы тикшерик (рәс. 165). AB һәм AC кисемтәләрен A ноктасыннан үткәрелгән орынма кисемтәләре дип атыйк. Алар мондый үзлеккә ия: **бер ноктадан үткәрелгән сферага орынма кисемтәләре тигез һәм бу нокта һәм сфера үзәге аша үтүче туры белән тигез почмаклар төзиләр.**

Бу үзлек турыпочмаклы ABO һәм ACO өчпочмакларыннан килеп чыга (аларның уртак AO гипотенузасы һәм сфераның радиусына тигез булган OB һәм OC катетлары бар).



Рәс. 164

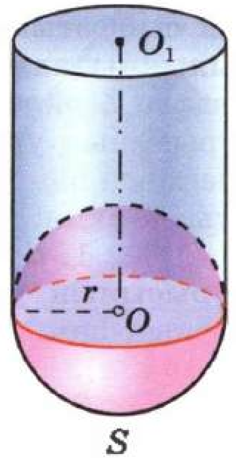


Рәс. 165

70* Цилиндрик өслеккә камалган сфера

Әгәр сфера цилиндрик өслекнең барлык төзүчеләренә орынса, **сфера цилиндрик өслеккә камалган,** диләр.

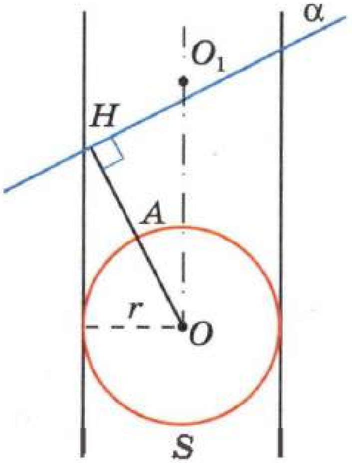
Радиусы r булган O һәм O_1 үзәкле түгәрәкләр һәм цилиндрик өслек белән чикләнгән цилиндрны, шулай ук O үзәкле радиусы r булган S сферасын тикшерик (рәс. 166). O ноктасыннан һәр төзүчегә кадәрге ераклык сфера радиусына тигез булганлыктан, бу сфера барлык төзүчеләргә орына, ягъни цилиндрик өслеккә камалган сфера була. S сферасының һәм цилиндрик өслекнең барлык уртак ноктaларының күплеге цилиндр нигезе әйләнәсеннән гыйбарәт булуын билгеләп үтик.



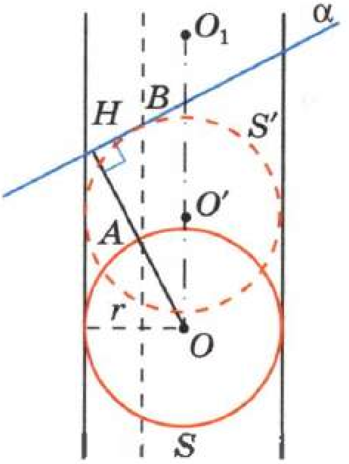
Рәс. 166

Ә хәзер тикшергән цилиндрик өслекнең бер төзүчесен кисеп үтүче һәм, димәк, барлык төзүчеләрен кисеп үтүче нинди дә булса α яссылыгын тикшерик. **α яссылыгына һәм цилиндрик өслеккә орынучы сфера булуын** исбатлыйк.

O ноктасыннан α яссылыгына OH перпендикуляры үткәрик (α яссылыгы O ноктасы аша үткән очракны үзлегегездән тикшерегез) һәм A хәрефе белән OH нурының һәм S сферасының кисешү ноктасын тамгалыйк (рәс. 167, *а*). A һәм H ноктaлары тәңгәл килсәләр, S эзләнелгән сфера була (моны нигезләгез). Әгәр инде A һәм H ноктaлары тәңгәл килмәсәләр, A ноктасы аша төзүчегә параллель булган туры үткәрәбез һәм B хәрефе ярдәмендә аның α яссылыгы белән кисешү ноктасын тамгалыйбыз. $\overrightarrow{AB}$ векторына параллель күчештә S сферасы OO_1 турысында яткан үзәге O' булган r радиуслы S' сферасына күчә (рәс. 167, *б*), шуңа күрә бу сфера цилиндрик өслеккә орына, O' ноктасыннан α яссылыгына кадәрге ераклык $O'B = OA$ га тигез (ни өчен икәнен аңлатыгыз), ягъни r радиусына тигез. Димәк, S' сферасы α яссылыгына орына, ягъни эзләнелгән була. Раслау исбатланды.



а)



б)

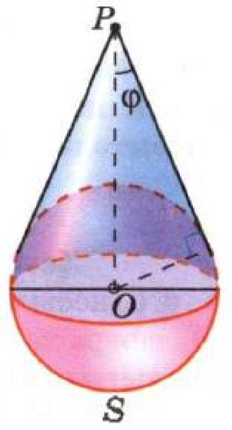
Рәс. 167

71* Коник өслеккә камалган сфера

Әгәр сфера коник өслекнең барлык төзүчеләренә орынса, **сфера коник өслеккә камалган,** диләр.

O үзәкле түгәрәк һәм коник өслек белән чикләнгән түбәсе P булган конусны тикшерик (рәс. 168). φ — PO турысы һәм төзүче арасындагы почмак, S — радиусы $PO \cdot \sin\varphi$ булган O үзәкле сфера. O ноктасыннан төзүчеләрнең һәрберсенә кадәрге ераклык сфераның радиусына тигез булганлыктан, бу сфера барлык

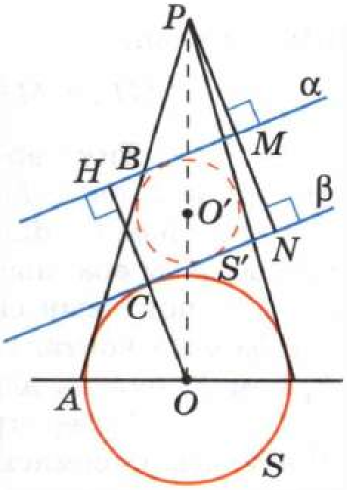
төзүчеләргә орына, ягъни коник өслеккә камалган сфера була. S сферасының һәм коник өслекнең барлык уртак нокталары күплеге конус нигезе өслегенә параллель булган өслектә ятучы һәм конус түбәсеннән $PO \cdot \cos^2 \varphi$ ераклыгына ераклашкан әйләнәдән гыйбарәт (моны, 168 нче рәсемнән файдаланып, үзлегегездән исбатлагыз).



Рәс. 168

PA — конус төзүчеләренең берсе, ди. Коник өслекнең PA төзүчесен PA нурында ятучы B ноктасында кисеп үтүче ниндидер α яссылыгын тикшерик. **α яссылыгына һәм коник өслеккә орынучы сфера** булуын исбатлыйк.

O ноктасыннан α яссылыгына OH перпендикуляры үткәрик (α яссылыгы O ноктасы аша үткән очракны үзлегегездән тикшерегез) һәм C хәрефе белән OH нурының һәм S сферасының кисешү ноктасын тамгалыйк (рәс. 169). C һәм H нокталары тәңгәл килсәләр, S сферасы — эзләнелгән сфера (моны нигезләгез). C һәм H нокталары тәңгәл килмәсә, C ноктасы аша S сферасына орынучы β яссылыгын үткәрик. PM һәм PN — P ноктасыннан α һәм β яссылыкларына үткәрелгән перпендикулярлар, ди. Үзәге һәм коэффициенты $\frac{PM}{PN}$ га тигез булган үзәкле охшашлык вакытында (58 нче п. ны карагыз) β яссылыгы α яссылыгына күчә, ә коник өслеккә һәм β яссылыгына орынучы S сферасы коник өслеккә һәм α яссылыгына орынучы S' сферасына күчә (моны исбатлагыз). Димәк, S' сферасы — эзләнелгән сфера. Раслау исбатланды.



Рәс. 169

72* Цилиндрик өслекләрнең кисемнәре

Кисүче өслек цилиндрик өслекнең төзүчесенә перпендикуляр булса, кисемнең әйләнә булуын беләбез инде. Кисүче өслек цилиндрик өслекнең төзүчесенә параллель булса, кисем ике параллель туры була (ни өчен икәнен аңлатыгыз). Әгәр α яссылыгы төзүчегә карата φ почмагы ($0 < \varphi < 90°$) белән үтсә, бу өслекнең α яссылыгы белән кисеме нинди рәвештә булыр?

M — кисемнең теләсә нинди ноктасы, F_1 — α яссылыгының һәм цилиндрик өслеккә орынучы S_1 сферасының орыну ноктасы, L_1 — сфераның һәм цилиндрик өслекнең орыну нокталарыннан торган әйләнә,

M_1 — M ноктасы белән бер төзүчедә яткан L_1 әйләнәсенең ноктасы, ди (рәс. 170, *а*). MF_1 һәм MM_1 кисемтәләре — M ноктасыннан S_1 сферасына үткәрелгән орынма кисемтәләре, шуңа күрә

$$MF_1 = MM_1.$$

Хәзер цилиндрик өслеккә L_2 әйләнәсе буенча, ә α яссылыгына нинди дер F_2 ноктасында орынучы S_2 сферасын тикшерик (S_2 сферасы S_1 сферасына α яссылыгының һәм цилиндрик өслек күчәренең кисешү ноктасына карата симметрик). M_2 — M ноктасы белән бер төзүчедә яткан L_2 әйләнәсенең ноктасы. MF_2 һәм MM_2 кисемтәләре S_2 сферасына M ноктасыннан үткәрелгән орынма кисемтәләре буларак тигез:

$$MF_2 = MM_2.$$

Шулай итеп,

$$MF_1 + MF_2 = MM_1 + MM_2 = M_1M_2.$$

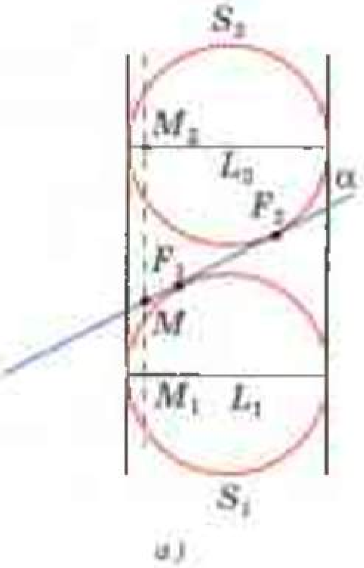
Тикшерелә торган кисемнең теләсә нинди M ноктасы өчен $MF_1 + MF_2$ суммасы M_1M_2 гә тигез, ягъни L_1 һәм L_2 әйләнәләренең параллель яссылыклары арасындагы ераклыкка тигез булуын күрәбез, һәм шуңа күрә M ноктасын сайлауга бәйле түгел. Димәк, кисемнең барлык нокталары α яссылыгында яткан фокуслары F_1 һәм F_2 булган эллипста ята (97 нче п. ны карагыз).

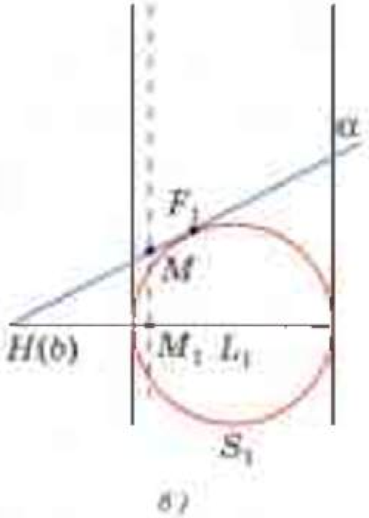
Хәзер күрсәтелгән эллипсның теләсә нинди N ноктасы кисемнең ноктасы булуын исбатлыйк. N ноктасы аша цилиндрның ике төзүче аша үтүче нинди дер β яссылыгы үткәрик (мәсәлән, күчәр кисеме яссылыгы). Ул тикшерелә торган кисемне α һәм β яссылыкларының кисешү сызыгы a да ятучы ике ноктада кисеп үтә, өстәвенә бу нокталарның һәрберсе эллипснyкы була (исбатланган буенча). Ләкин a турысының эллипс белән икедән артык уртак ноктасы була алмый (97 нче п. ны карагыз). Димәк, N ноктасы бу ике ноктаның берсе, ягъни кисем ноктасы була.

Шулай итеп, цилиндрик өслекнең α яссылыгы белән кисеме эллипс була.

Искәрмә

Кисемнең барлык нокталары фокусы F_1 булган эллипста ятуын башкача ачыкларга була. b — α яссылыгының L_1 әйләнәсе яссылыгы белән кисешү сызыгы, MH — кисемнең M ноктасыннан b турысына





Рәс. 170

үткәрелгән перпендикуляр булсын (рәс. 170, *б*; бу рәсемдә b турысының сурәте булып H ноктасы хезмәт итә). Ул вакытта $\angle HMM_1 = \varphi$ һәм шуңа күрә

$$\frac{MM_1}{MH} = \cos\varphi.$$

Ләкин $MM_1 = MF_1$. Димәк, кисемнең һәр M ноктасыннан F_1 ноктасына кадәрге ераклыгының M ноктасыннан b турысына кадәр ераклыгына чыгыштырмасы M ноктасына бәйле булмаган һәм 1 дән кечерәк $\cos\varphi$ санына тигез. Икенче төрле әйткәндә, кисемнең һәр ноктасы фокусы F_1, директрисасы b һәм эксцентриситеты $\cos\varphi$ булган эллипста ята.

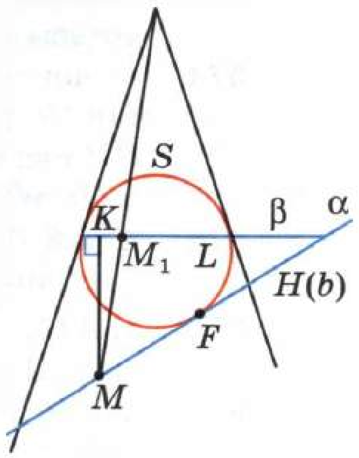
73* Коник өслекнең кисемнәре

Төрле яссылыклар белән коник өслекнең кисемнәрен тикшерик. Кисүче яссылык коник өслекнең түбәсе аша үтсә, кисем булып я ике төзүче, я бер төзүче, я бер нокта — коник өслекнең түбәсе тора (ни өчен икәнен аңлатыгыз). Түбәсе аша үтмәгән α яссылыгы белән кисем нинди рәвештә булыр?

φ — α яссылыгы белән коник өслек, ягъни түгәрәк һәм бу өслек белән чикләнгән ниндидер конусның күчәре арасындагы почмак, ди. $\varphi = 90°$ булса, белгәнебезчә, кисем булып әйләнә тора. $\varphi \neq 90°$, θ — коник өслек һәм аның төзүче арасындагы почмак, M — кисемнең теләсә нинди ноктасы, F — α яссылыгының һәм коник өслеккә орынучы S сферасының орыну ноктасы, L — сфераның һәм коник өслекнең орыну нокталарыннан торган әйләнә, M_1 — M ноктасы белән бер төзүчедә яткан L әйләнәсенең ноктасы (рәс. 171), ди. MF һәм MM_1 кисемтәләре M ноктасыннан S сферасына үткәрелгән орынмаларның кисемтәләре булып торалар, шуңа күрә $MF = MM_1$.

M ноктасыннан L әйләнәсенең β яссылыгына MK перпендикуляры үткәрәбез, b хәрефе белән α һәм β яссылыкларының кисешү сызыгын тамгалыйбыз һәм M ноктасыннан b турысына MH перпендикуляры үткәрәбез. Ул вакытта $\angle KMM_1 = \theta$, $\angle KMH = \varphi$ һәм турыпочмаклы MKM_1 һәм MKH өчпочмакларыннан табабыз: $MK = MM_1\cos\theta$, $MK = MH\cos\varphi$. $MM_1 = MF$ булуын исәпкә алып, түбәндәге тигезлекне табабыз:

$$\frac{MF}{MH} = \frac{\cos\varphi}{\cos\theta}.$$



Рәс. 171

$\cos\varphi < \cos\theta$ булса, кисемнең барлык нокталары фокусы F һәм директрисасы b булган эллипста, $\cos\varphi = \cos\theta$ булса, фокусы F һәм директрисасы b булган параболада, $\cos\varphi > \cos\theta$ булса, фокусы F һәм директрисасы b булган гиперболада ята. Күрсәтелгән сызыкларның һәр ноктасы кисем ноктасы булуының исбатланышын үзлегегездән (72 нче п. тагы исбатлауга охшаш) үткәрегез.

Шулай итеп, **кисүче яссылык һәм коник өслекнең күчәре арасындагы почмакка бәйле рәвештә кисем эллипс, парабола яки гипербола булырга мөмкин.** Моңа сәбәпле эллипс, парабола һәм гиперболаны **коник кисемнәр** дип гомуми исем белән берләштереп йөртәләр.

Искәрмәләр

1. $\cos\varphi \neq \cos\theta$ булган очракта, α яссылыгына һәм коник өслеккә орынучы тагын бер сфераны тикшерергә һәм кисемнең һәр ноктасы эллипста я гиперболада ята дигән тагын бер исбатлауны китерергә була. Моны ничек эшләргә булуын уйлап карагыз.

2. Исбатланган раслаудан әйләнәнең үзәк проекциясе я эллипс, я парабола, я гиперболаның бер тармагы булуы чыга (ни өчен икәнен аңлатыгыз). Бу факт безгә тәҗрибәдән билгеле. Мәсәлән, автомобиль фарасының якын уты — асфальтның эллипс белән, ә ерак уты гипербола белән чикләнгән өлешен яктырта.

Мәсьәләләр

573 A һәм B нокталары $O \notin AB$ үзәкле сферада ята, ә M ноктасы AB кисемтәсендә ята. а) M ноктасы AB кисемтәсенең уртасы булса, $OM \perp AB$ икәнен; б) $OM \perp AB$ булса, M ноктасы AB кисемтәсенең уртасы икәнен исбатлагыз.

574 M ноктасы — AB кисемтәсенең уртасы, аның очлары үзәге O булган R радиуслы сферада ята. а) $R = 50$ см, $AB = 40$ см булса, OM ны; б) $R = 15$ мм, $AB = 18$ мм булса, OM ны; в) $R = 10$ дм, $OM = 60$ см булса, AB ны; г) $R = a$, $OM = b$ булса, AM ны табыгыз.

575 A һәм B нокталары R радиуслы сферада ята. $AB = m$ булса, сфера үзәгеннән AB турысына кадәр ераклыкны табыгыз.

576 а) $A(2; -4; 7)$, $R = 3$; б) $A(0; 0; 0)$, $R = \sqrt{2}$; в) $A(2; 0; 0)$, $R = 4$ булса, үзәге A булган R радиуслы сфераның тигезләмәсен языгыз.

577 а) $A(-2; 2; 0)$, $N(5; 0; -1)$; б) $A(-2; 2; 0)$, $N(0; 0; 0)$; в) $A(0; 0; 0)$, $N(5; 3; 1)$ булса, N ноктасы аша үтүче A үзәкле сфераның тигезләмәсен языгыз.

578 а) $x^2 + y^2 + z^2 = 49$; б) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 2$ тигезләмәсе белән бирелгән сфераның үзәге һәм радиусы координаталарын табыгыз.

579 Түбәндәге тигезләмәләрнең һәркайсы сфера тигезләмәсе булганын исбатлагыз. Бу сфераның үзәге һәм радиусы координаталарын табыгыз: а) $x^2 - 4x + y^2 + z^2 = 0$; б) $x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 24$; в) $x^2 + 2x + y^2 + z^2 = 3$; г) $x^2 - x + y^2 + 3y + z^2 - 2z = 2{,}5$.

580 41 дм радиуслы шар үзегеннән 9 дм ераклыкта торган яссылык белән кистерелгән. Кисем мәйданын табыгыз.

581 ABC өчпочмагының түбәләре 13 см радиуслы сферада ята. $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, $AC = 10$ см булса, сфера үзәгеннән өчпочмак яссылыгына кадәр ераклыкны табыгыз.

582 Турыпочмаклыкның түбәләре 10 см радиуслы сферада ята. Турыпочмаклыкның диагонале 16 см га тигез булса, сфера үзәгеннән турыпочмаклык яссылыгына кадәр ераклыкны табыгыз.

583 Өчпочмакның яклары 5 см радиуслы сферага орына. Өчпочмакның яклары 10 см, 10 см һәм 12 см га тигез булса, сфера үзәгеннән өчпочмак яссылыгына кадәр ераклыкны табыгыз.

584 ABC өчпочмагының барлык яклары да 5 см радиуслы сферага орыналар. $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $CA = 15$ см булса, сфера үзәгеннән өчпочмак яссылыгына кадәр ераклыкны табыгыз.

585 Диагональләре 15 см һәм 20 см га тигез булган ромбның барлык яклары да 10 см радиуслы сферага орыналар. Сфера үзәгеннән ромб яссылыгына кадәр ераклыкны табыгыз.

586 OH кисемтәсе — $OABC$ тетраэдрының биеклеге. а) $R = 6$ дм, $OH = 60$ см; б) $R = 3$ м, $OH = 95$ см; в) $R = 5$ дм, $OH = 45$ см; г) $R = 3{,}5$ дм, $OH = 40$ см булса, үзәге O ноктасы булган R радиуслы сфера белән ABC яссылыгының үзара торышын ачыклагыз.

587 R радиуслы шар үзәгеннән кисүче яссылыкка кадәр ераклык d га тигез. а) $R = 12$ см, $d = 8$ см булса, кисем мәйданы S ны; б) кисем мәйданы 12 $см^2$ га тигез, $d = 2$ см булса, R ны исәплəп чыгарыгыз.

588 Сфераның радиусын урталай бүлүче нокта аша, шул радиуска перпендикуляр итеп, кисүче яссылык үткәрелгән. Сфераның радиусы R га тигез. а) Барлыкка килгән кисемнең радиусын; б) сфераның үзәге — түбәсе, ә барлыкка килгән кисем нигезе булган конусның ян өслеге мәйданын табыгыз.

589 Кисүче яссылык R радиуслы сфера диаметрының очы аша аның белән α га тигез почмак ясап үтә. а) $R = 2$ см, $\alpha = 30°$; б) $R = 5$ м, $\alpha = 45°$ булса, килеп чыккан кисемнең әйләнә озынлыгын табыгыз.

590 Бирелгән шарның чиге булган R радиуслы сфераның ноктасы аша ике яссылык үткәрелгән, аларның берсе — орынма яссылык, ә икенчесе орынма яссылыкка φ почмагы ясап авышкан. Бирелгән шарның кисем мәйданын табыгыз.

591 Сфера 120° лы икекырлы почмакның кырларына орына. Сфера үзәгеннән икекырлы почмакның кабыргасына кадәрге ераклык a га тигез булса, сфераның радиусын һәм орыну нокталары арасындагы ераклыкны табыгыз.

592 Сфераның радиусы 112 см га тигез. Сферага орынма яссылыктагы нокта орыну ноктасыннан 15 см ераклыкта урнашкан. Бу ноктадан сфераның иң якын ноктасына кадәр ераклыкны табыгыз.

593 Радиусы: а) 6 см; б) 2 дм; в) $\sqrt{2}$ м; г) $2\sqrt{3}$ см га тигез булса, сфераның мәйданын табыгыз.

594 Сфераның үзәге аша үтүче кисем мәйданы 9 $м^2$ га тигез. Сфераның мәйданын табыгыз.

595 Сфераның мәйданы 324 $см^2$ га тигез. Сфераның радиусын табыгыз.

596 Ике сфераның мәйданы аларның радиусларының квадратына пропорциональ икәнен исбатлагыз.

597 Мәйданы 5 м радиуслы сфера мәйданына тигез булган түгәрәкнең радиусын исәпләп чыгарыгыз.

598 Сфераның ике параллель кисеменең радиуслары 9 см һәм 12 см га тигез. Ике кисүче яссылык арасындагы ераклык 3 см га тигез. Сфераның мәйданын табыгыз.

599 Сфераның үзара перпендикуляр яссылык белән кисеменең радиуслары r_1 һәм r_2 гә тигез. Кисемнәрнең бердәнбер уртак ноктасы булса, сфераның мәйданын табыгыз.

600 Квадратны бер ягы тирәсендә әйләндерүдән килеп чыккан цилиндрның тулы өслеге радиусы квадратның ягына тигез булган сфера мәйданына тигез икәнен исбатлагыз.

VI бүлеккә сораулар

1 Цилиндрның нигез яссылыгы белән цилиндрның төзүчесе аша үтүче яссылык арасындагы почмак нәрсәгә тигез?

2 Цилиндрның аның төзүчесенә параллель яссылык белән кисеме нәрсәдән гыйбарәт?

3 Цилиндрның нигезендә бер-берсенә параллель булмаган ике хорда алынган. Бу хорда ноокталары арасындагы иң кыска ераклык: а) цилиндрның биеклегенә тигез; б) цилиндрның биеклегеннән зуррак; в) цилиндрның биеклегеннән кечерәк булуы мөмкинме?

4 Ике цилиндрик деталь бердәй калынлыктагы никель катламы белән каплана. Беренче детальнең биеклеге икенчесенең биеклегеннән ике тапкыр зуррак, ләкин аның нигез радиусы икенче детальнең нигез радиусыннан ике тапкыр кечерәк. Кайсы детальгә күбрәк никель тотылыр?

5 Конусның төзүчеләре белән: а) нигез яссылыгы; б) кучәре арасындагы почмаклар бер-берсенә тигезме?

6 Конусның түбәсе аша үтүче яссылык белән кисеме нәрсәдән гыйбарәт?

7 A һәм B — шар нокталары. AB кисемтәсенең теләсә кайсы ноктасы бу шарныкы буламы?

8 Катетлары 4 см һәм $2\sqrt{2}$ см булган турыпочмаклы өчпочмакның барлык түбәләре дә $\sqrt{5}$ см радиуслы сферада ятуы мөмкинме?

9 Уртак үзәкле һәм радиуслары тигез булмаган ике сфера уртак орынма яссылыкка ия булуы мөмкинме?

10 Пространствоның бирелгән кисемтә туры почмак булып күренә торган барлык ноктлары күплеге нәрсәдән гыйбарәт?

Өстәмә мәсьәләләр

601 Цилиндрның күчәр кисеме мәйданы S ка тигез. Нигез радиусының уртасы аша шул радиуска перпендикуляр үтүче яссылык белән цилиндрның кисем мәйданын табыгыз.

602 $ABCD$ турыпочмаклыгының A һәм B түбәләре — цилиндр нигезенең бер әйләнәсендә, ә C һәм D түбәләре икенче нигез әйләнәсендә ята. Цилиндрның төзүчесе a га тигез, $AB = a$, ә BC турысы белән нигез яссылыгы арасындагы почмак $60°$ ка тигез булса, аның радиусын исәпләп чыгарыгыз.

603 Яссылык цилиндр күчәренә параллель һәм бу яссылык белән күчәр арасындагы ераклык цилиндрның радиусына тигез булса, яссылык цилиндрның бары тик бер генә төзүчесен эченә алганын исбатлагыз. (Бу очракта яссылык цилиндрга **орынма яссылык** дип атала.)

604 Турыпочмаклыкны тигез булмаган яклары тирәсендә әйләндергәндә, тулы өслегенең мәйданнары S_1 һәм S_2 гә тигез булган цилиндрлар килеп чыга. Турыпочмаклыкның диагоналең табыгыз.

605 Цилиндрның күчәр кисеме: а) квадрат; б) $AB : AD = 1 : 2$ булган $ABCD$ турыпочмаклыгыннан торса, цилиндрның тулы өслеге мәйданының аның ян өслеге мәйданына чагыштырмасын табыгыз.

606 Цилиндрның ян өслеге мәйданы аның күчәр кисемен камаучы түгәрәк мәйданына тигез. Цилиндр радиусының аның биеклегенә чагыштырмасын табыгыз.

607 Цилиндрның күчәр кисеменең периметры $2p$ булганда, иң зур ян өслек мәйданына ия булган цилиндрның биеклеген һәм радиусын табыгыз.

608 Цилиндрик формадагы стаканның ян-ягының һәм төбенең калынлыгы 1 см га, стаканның биеклеге 16 см га, ә эчке радиусы 5 см га тигез. Стаканның тулы өслеген исәпләп чыгарыгыз.

609 Түгәрәкнең чирек өлеше коник өслек итеп төрелгән. Конусның төзүчесе нигез радиусыннан дүрт тапкыр зуррак икәнен исбатлагыз.

610 Өч парлы-парлы перпендикуляр төзүчеләргә ия булган конуста күчәр кисеменең түбә янындагы почмагының косинусын табыгыз.

611 Конусның нигез мәйданы S_1 гә, ян өслеге мәйданы S_0 гә тигез. Конусның күчәр кисеме мәйданын табыгыз.

612 Конусның ян һәм тулы өслегенең мәйданнары чагыштырмасы $\frac{7}{8}$ гә тигез. Конусның төзүчесе белән нигез яссылыгы арасындагы почмагын табыгыз.

613 Конусның түбәсе һәм нигезенең $120°$ лы дуганы тартып торучы хордасы аша нигез яссылыгы белән $45°$ лы почмак ясаучы кисем үткәрелгән. Нигезенең радиусы 4 см га тигез булса, кисем мәйданын табыгыз.

614 Конусның ян өслегенең җәелмәсе $270°$ лы сектор булса, аның биеклеге белән төзүчесе арасындагы почмакны табыгыз.

615 Катетлары a һәм b булган турыпочмаклы өчпочмак гипотенузасы тирәсендә әйләнә. Килеп чыккан җисемнең өслек мәйданын табыгыз.

616 Нигезләре 6 см һәм 10 см га тигез, ә кысынкы почмагы 60° булган тигезьянлы трапеция зур нигезе тирәсендә әйләнә. Килеп чыккан җисемнең өслек мәйданын табыгыз.

617 Конусның биеклеге 4 см га, ә нигез радиусы 3 см га тигез. а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$ булса, конуска камаулы* n-почмаклы төзек пирамиданың тулы өслек мәйданын исәпләп чыгарыгыз.

618 Кисек конуста күчәр кисеменең диагональләре перпендикулярлар. Күчәр кисеменең бер нигезе 40 см га, ә мәйданы 36 $дм^2$ га тигез. Кисек конусның ян һәм тулы өслекләрен исәпләп чыгарыгыз.

619 а) Сфера үзәге сфераның симметрия үзәге икәнен; б) сфераның үзәге аша үтүче теләсә нинди туры сфераның симметрия күчәре икәнен; в) сфераның үзәге аша үтүче теләсә нинди яссылык сфераның симметрия яссылыгы икәнен исбатлагыз.

620 Катетлары 1,8 см һәм 2,4 см га тигез булган турыпочмаклы өчпочмакның түбәләре сферада ята. а) Сфераның радиусы 1,5 см га тигез булса, сфераның үзәге өчпочмак яссылыгында ятканын исбатлагыз. б) Сфераның радиусы 6,5 см га тигез булса, сфера үзәгеннән өчпочмак яссылыгына кадәрге ераклыкны табыгыз.

621 A ноктасы O үзәкле бирелгән сфераның радиусында ята һәм бу радиусны, сфераның үзәгеннән исәпләгәндә, 1 : 2 чагыштырмасында бүлә. A ноктасы аша, α яссылыгына орынучы O үзәкле сфераның радиусы бирелгән сфераның радиусыннан 6 тапкырга кечерәк булырлык итеп, α яссылыгы үткәрелгән. а) OA турысы белән α яссылыгы арасындагы почмакны; б) бирелгән сфераның α яссылыгы белән кисем мәйданының сфераның үзенең мәйданына чагыштырмасын табыгыз.

622 $(x - 3)^2 + y^2 + (z + 5)^2 = 25$ тигезләмәсе белән бирелгән сфераның координата күчәрләре белән кисешү нокталарының координаталарын табыгыз.

623 $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ сферасының $M(2; 4; 5)$ ноктасы аша үтүче һәм абсциссалар күчәренә перпендикуляр яссылык белән кисеменең радиусын табыгыз.

624 Ике турыпочмаклык төрле яссылыкларда ята һәм уртак якка ия. Бирелгән турыпочмаклыкларның барлык түбәләре дә бер сферада ятуын исбатлагыз.

625 Ике тигез сфераның үзәкләре арасындагы ераклык аларның диаметрыннан кечерәк. а) Бу сфераларның әйләнә буйлап кисешкәнен исбатлагыз. б) Сфераларның радиусы R га, ә аларның үзәкләре арасындагы ераклык $1{,}6R$ га тигез булса, бу әйләнәнең радиусын табыгыз.

626 A, B, C һәм D нокталары R радиуслы сферада яталар, шуның белән бергә $\angle ADB = \angle BDC = \angle CDA = 2\varphi$, $AD = BD = CD$. а) AB һәм AD ны; б) сфераның ABC яссылыгы белән кисеменең мәйданын табыгыз.

---

* Пирамиданың нигезе конус нигезенә камаулы, ә түбәсе конус түбәсе белән тәңгәл килсә, ул **конуска камаулы пирамида** дип атала.

627 Сфераның радиусы 10 см га тигез. Сферадан читтә — аның иң якын ноктасыннан 16 см ераклыкта — M ноктасы бирелгән. Сферада барлык нокталары M ноктасыннан 24 см ераклыктагы әйләнәнең озынлыгын табыгыз.

628 Җисем уртак үзәкле ике сфера белән чикләнгән. Бу җисемнең сфераларның үзәге аша үтүче яссылык белән кисеменең мәйданы эчке сферага орынма яссылык белән кисеменең мәйданына тигез икәнен исбатлагыз.

Күпкырлыклар, цилиндр, конус һәм шар белән төрле мәсьәләләр

Бу бүлектәге мәсьәләләрдә очраячак кайбер терминнарны ачыклап китик. Сфера күпкырлыкның барлык кырларына да орынса, ул күпкырлык **сфераны камаучы** дип аталганын исегезгә төшерәбез. Бу вакытта сфера **күпкырлыкка камаулы** дип атала. Күпкырлыкның барлык түбәләре сферада ятса, ул **сферага камаулы** дип атала. Бу вакытта сфера **күпкырлыкны камаучы** дип атала.

629 Цилиндрга камаулы өчпочмаклы призманың* бер кыры цилиндрның үзәге аша үтсә, аның калган ике кыры үзара перпендикуляр икәнен исбатлагыз.

630 Биеклеге 12 см га тигез конуска пирамида камалган. Пирамиданың нигезе — яклары 6 см һәм 8 см булган турыпочмаклык. Пирамида һәм конусның тулы өслекләренең мәйданнары чагыштырмасын табыгыз.

631 Кисек конуска n-почмаклы төзек кисек пирамида камалган (ягъни пирамиданың нигезләре кисек конусның нигезләренә камалган). Кисек конусның нигез радиуслары 2 см һәм 5 см га, ә биеклеге 4 см га тигез. а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$ булганда, пирамиданың тулы өслек мәйданын исәпләп чыгарыгыз.

632 Төзек призмага сфера камап булса, бу призма нигезенең үзәкләрен тоташтыручы кисемтәнең уртасы сфераның үзәге булганын исбатлагыз.

633 Төзек пирамидага камаулы сфераның үзәге бу пирамиданың биеклегендә ятканын исбатлагыз.

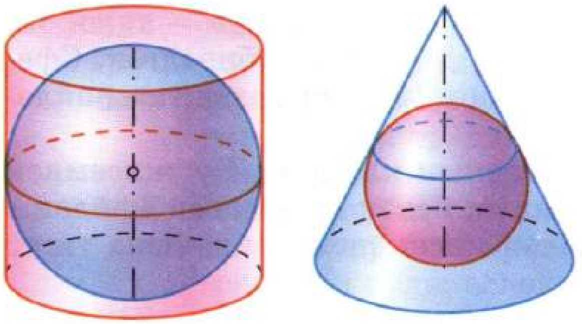
634 Сфераның радиусы R га тигез. Күпкырлык а) куб; б) алтыпочмаклы төзек призма; в) төзек тетраэдр булса, сфераны камаучы күпкырлыкның тулы өслеге мәйданын табыгыз.

635 R радиуслы сфераны түбә янындагы яссы почмагы α га тигез булган дүртпочмаклы төзек пирамида камап тора. а) Пирамиданың ян өслеге мәйданын табыгыз. б) Бу мәйданны $R = 5$ см, $\alpha = 60°$ булганда исәпләп чыгарыгыз.

636 Дүртпочмаклы төзек кисек пирамидага сфера камап булса, пирамиданың апофемасы аның ян кырының нигез яклары ярымсуммасына тигез икәнен исбатлагыз.

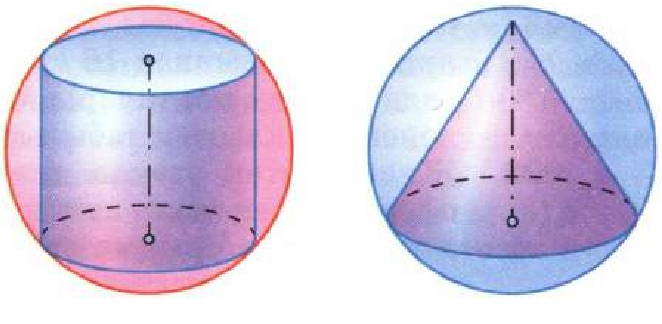
---

* Призманың нигезләре цилиндрның нигезләренә камалган булса, призма **цилиндрга камаулы** дип атала.



а) *б)*

Рәс. 172



а) *б)*

Рәс. 173

637 а) Төзек призманы камаучы сфераның үзәге бу призманың нигез үзәкләрен тоташтыручы кисемтәнең уртасында ятканын; б) төзек пирамиданы камаучы сфераның үзәге бу пирамиданың биеклегендә яки аның дәвамында ятканын исбатлагыз.

638 а) Теләсә нинди тетраэдрны сфера белән камап булганын; б) теләсә нинди тетраэдрга сфера камалырга мөмкин икәнен исбатлагыз.

639 Сфераның радиусы R га тигез. а) Сферага камаулы кубның; б) биеклеге R га тигез булган камаулы алтыпочмаклы төзек призманың; в) камаулы төзек тетраэдрның тулы өслеге мәйданын табыгыз.

640 Өчпочмаклы төзек пирамиданың нигезенең ягы a га, ә ян кабыргасы $2a$ га тигез. Камаулы һәм камаучы сфераларның радиусларын табыгыз.

641 Дүртпочмаклы төзек пирамидага камаулы һәм аны камаучы сфераларның радиуслары 2 см һәм 5 см га тигез. Пирамида нигезенең ягын һәм биеклеген табыгыз.

642 Сфера цилиндрга камалган (ягъни ул цилиндрның нигезләренә һәм һәр төзүчесенә орына, рәс. 172, *а*). Сфера мәйданының цилиндр тулы өслеге мәйданына чагыштырмасын табыгыз.

643 Күчәр кисеменең түбә янындагы почмагы — φ гә, нигез радиусы r га тигез булган конуска R радиуслы сфера камалган (ягъни сфера конусның нигезенә һәм һәр төзүчесенә орына, рәс. 172, *б*). а) R һәм φ билгеле булса, r ны; б) r һәм φ билгеле булса, R ны; в) $R = 1$ см, $r = \sqrt{3}$ см булса, φ не табыгыз.

644 Конуска r радиуслы сфера камалган. Конусның төзүчесе белән нигезе арасындагы почмагы α га тигез булса, конусның тулы өслеге мәйданын табыгыз.

645 Цилиндр сферага камалган (ягъни цилиндрның нигезләре сфераның кисемнәре булып тора, рәс. 173, *а*). Цилиндрның биеклеге нигезенең диаметрына тигез булса, цилиндрның тулы өслеге мәйданының сфера мәйданына чагыштырмасын табыгыз.

646 Күчәр кисеменең түбә янындагы почмагы φ гә, нигезенең радиусы r га тигез булган конус R радиуслы сферага камалган (ягъни конусның түбәсе сферада ята, ә конусның нигезе сфераның кисеме булып тора, рәс. 173, *б*). а) R һәм φ билгеле булса, r ны; б) r һәм φ билгеле булса, R ны; в) $R = 2r$ булса, φ не табыгыз.

VII бүлек
Җисемнәрнең күләмнәре

§ 1 Турыпочмаклы параллелепипед күләме

74 Күләм төшенчәсе

Җисемнең күләм төшенчәсе яссы фигураның мәйдан төшенчәсенә охшаш рәвештә кертелә. Планиметрия курсыннан һәр күппочмакның мәйданы сайлап алынган мәйдан үлчәү берәмлеге ярдәмендә үлчәнгәне билгеле. Гадәттә, мәйдан үлчәү берәмлеге сыйфатында ягы кисемтәләрне үлчәү берәмлегенә тигез булган квадрат алына.

Аналогик рәвештә тикшерелә торган һәр җисемнең күләмен сайлап алынган күләмнәрне үлчәү берәмлеге ярдәмендә үлчәргә мөмкин дип исәплəрбез. Күләмнәрне үлчәү берәмлеге итеп кабыргасы кисемтәләрне үлчәү берәмлегенә тигез булган кубны кабул итәрбез. Кабыргасы 1 см га тигез кубны **куб сантиметр** дип атыйлар һәм см^3 рәвешендә тамгалыйлар. **Куб метр** (м^3), **куб миллиметр** (мм^3) һ. б. аналогик рәвештә билгеләнә.

Күләмне мәйданнарны үлчәгән кебек үк үлчиләр. Сайлап алынган үлчәү берәмлегендә һәр җисемнең күләме уңай сан белән аңлатыла, бу сан күләмнәрне үлчәү берәмлегенең һәм шул берәмлек өлешләренең бирелгән җисемдә ничә тапкыр урнашуын күрсәтә. Билгеле, җисемнең күләмен аңлаткан сан күләмнәрне үлчәү берәмлеген сайлап алуга бәйле, шуңа күрә бу саннан соң күләмнәрне үлчәү берәмлеге күрсәтелә. Мәсәлән, күләмнәрне үлчәү берәмлеге сыйфатында 1 см^3 алынса һәм ниндидер җисемнең V күләме 2 гә тигез булса, ул вакытта $V = 2$ см^3 дип язалар.

Әгәр ике җисем тигез булса, аларның һәркайсы күләмнәрне үлчәүнең бер үк сандагы берәмлеген һәм аның өлешләрен эченә алырлар, ягъни күләмнәрнең түбәндәге үзлеге урынлы булыр:

1^0. Тигез җисемнәр тигез күләмгә ия.

Искәрмә

Ике фигураның, аерым алганда ике җисемнең, тигезлеге стереометриядә дә планиметриядәге кебек үк билгеләнә: бер җисемне икенчесенә салып карау юлы белән тәңгәл китереп булса, алар тигез дип атала.

Тигез җисемнәргә мисал итеп, тиңдәшле үлчәнешләре тигез булган ике турыпочмаклы параллелепипедны (рәс. 174, *а*), нигезләре һәм биеклекләре тигез булган ике туры призманы, тиңдәшле рәвештә нигезләренең яклары һәм биеклекләре тигез булган ике төзек пирамиданы (рәс. 174, *б*) алырга була. Күрсәтелгән очракларның һәркайсында ике җисемнең тигезлеген салып карау һәм фигураларның тигезлеге аксиомалары нигезендә исбатларга мөмкин (2 нче кушымтаны кара).

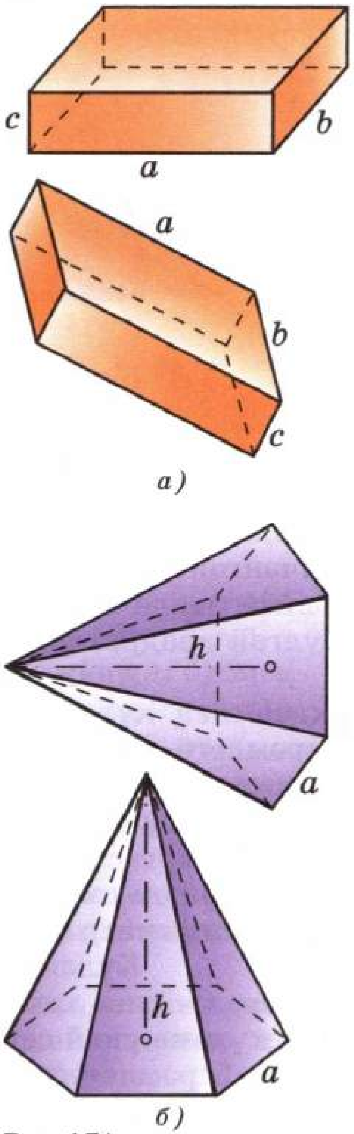
Күләмнәрнең тагын бер үзлеген тикшерик. Җисем берничә җисемнән төзелгән булсын, ди. Ул вакытта бу җисемнәрнең теләсә кайсы икесенең уртак эчке нокталары булмый, ләкин уртак чик нокталарга ия дип исәпләнә (175 нче рәс. кара, Q цилиндры белән F конусы уртак чик нокталарга ия, болар — аларның уртак нигез нокталары). Җисемнең тулаем күләме әлеге җисемне төзүче җисемнәрнең күләмнәрен кушып табылуы билгеле. Шулай итеп,

2^0. Җисем берничә җисемнән төзелгән булса, аның күләме бу җисемнәрнең күләмнәре суммасына тигез.

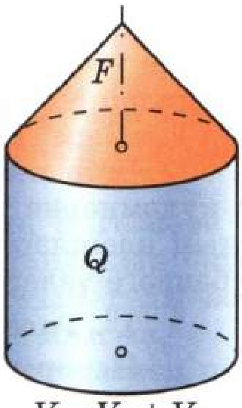
1^0 һәм 2^0 үзлекләре **күләмнәрнең төп үзлекләре** дип атала. Кисемтәләрнең озынлыклары һәм күппочмакларның мәйданнары аналогик үзлекләргә ия икәнен исегезгә төшереп үтәбез. Киләчәктә без, бу үзлекләргә нигезләнеп, параллелепипед, призма, пирамида, цилиндр, конус, шарның күләмен исәпләү өчен, формулалар чыгарырбыз.

Башта 1^0 һәм 2^0 үзлекләреннән чыгучы бер нәтиҗәне билгеләп үтик. Күләмнәрне үлчәү берәмлеге итеп кабул ителгән кубны тикшерербез. Аның кабыргасы кисемтәләрне үлчәү берәмлегенә тигез. Бу кубның һәр кабыргасын n тигез кисәккә бүләбез (n — ирекле рәвештә алынган бөтен сан) һәм бүлү нокталары аша бу кабыргага перпендикуляр яссылыклар үткәрәбез. Куб кабыргасы $\frac{1}{n}$ булган n^3 санына тигез кечкенә кубларга бүленә. Барлык кечкенә кубларның күләмнәре суммасы кубның тулы күләменә тигез (2^0 үзлеге), ягъни 1 гә тигез булганга, һәр кечкенә кубның күләме $\frac{1}{n^3}$ ка тигез (кечкенә кубларның күләме, 1^0 үзлеге буенча, бер-берсенә тигез). Шулай итеп, **кабыргасы $\frac{1}{n}$ булган кубның күләме $\frac{1}{n^3}$ ка тигез.**

Бу факт безгә киләсе пунктта турыпочмаклы параллелепипедның күләм формуласын чыгарганда кирәк булачак.



Рәс. 174



$V = V_F + V_Q$

Рәс. 175

75 Турыпочмаклы параллелепипедның күләме

Теорема

Турыпочмаклы параллелепипедның күләме аның өч үлчәнешенең тапкырчыгышына тигез.

Исбатлау

Турыпочмаклы P параллелепипедының үлчәнешләрен a, b, c хәрефләре белән, ә күләмен V хәрефе белән тамгалыйк һәм $V = abc$ икәнен исбатлыйк.

Ике очрак булуы мөмкин.

1) a, b һәм c ның үлчәнешләре өтердән соң тамгалар саны n нан зур булмаган ($n \geqslant 1$ дип исәпләргә мөмкин) чикле унарлы вакланмалардан гыйбарәт. Бу очракта $a \cdot 10^n$, $b \cdot 10^n$ һәм $c \cdot 10^n$ бөтен саннар була. Параллелепипедның һәр кабыргасын $\frac{1}{10^n}$ озынлыктагы тигез кисәкләргә бүлеп, һәр бүлү ноктасы аша бу кабыргага перпендикуляр яссылыклар үткәрәбез. P параллелепипеды кабыргасы $\frac{1}{10^n}$ булган $abc \cdot 10^{3n}$ нә тигез кубка бүленер. Мондый һәр кубның күләме $\frac{1}{10^{3n}}$ нә тигез булганга күрә (74 нче п. ны кара), P параллелепипедының тулаем күләме $abc \cdot 10^{3n} \cdot \frac{1}{10^{3n}} = abc$ була. Шулай итеп, $V = abc$.

2) a, b һәм c үлчәнешләренең берсе булса да чиксез унарлы вакланмадан тора. a, b, c саннарында өтердән соңгы, $(n + 1)$ нче урыннан башлап, барлык цифрларны алып ташлаганнан соң килеп чыккан a_n, b_n, c_n чикле унарлы вакланмаларын тикшерик. $a_n \leqslant a \leqslant a'_n$ (монда $a'_n = a_n + \frac{1}{10^n}$) икәнлеге ачык, шундый ук тигезсезлекләр b һәм c өчен дә дөрес. Бу тигезсезлекләрне тапкырлап табабыз:

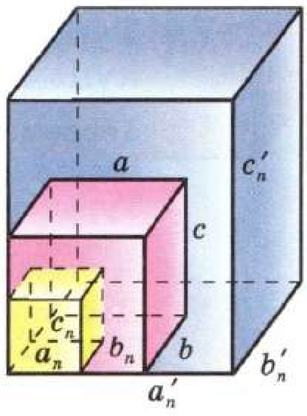
$$a_n b_n c_n \leqslant abc \leqslant a'_n b'_n c'_n, \text{ биредә } b'_n = b_n + \frac{1}{10^n},\ c'_n = c_n + \frac{1}{10^n}. \quad (1)$$

Беренче очракта исбатлаган буенча, (1) нең сул кисәге — үлчәнешләре a_n, b_n, c_n булган турыпочмаклы P_n параллелепипедының күләме V_n, ә уң кисәге үлчәнешләре a'_n, b'_n, c'_n булган турыпочмаклы P'_n параллелепипедының күләме V'_n була. P параллелепипеды P_n параллелепипедын үз эченә алганга, ә үзе исә P'_n параллелепипеды эчендә урнашканга күрә (рәс. 176),

P параллелепипедының V күләме $V_n = a_n b_n c_n$ һәм $V'_n = a'_n b'_n c'_n$ күләмнәре арасында урнаша, ягъни

$$a_n b_n c_n \leqslant V \leqslant a'_n b'_n c'_n. \qquad (2)$$

n ны чикләнмәгән рәвештә зурайтыйк. Ул вакытта $\frac{1}{10^n}$ саны теләгән кадәр кечкенә булачак, һәм шуңа күрә $a'_n b'_n c'_n$ саны $a_n b_n c_n$ санынннан теләгән кадәр аз аерылыр. Моннан (1) һәм (2) тигезсезлекләре нигезендә V санының abc санынннан теләгән кадәр аз аерылганлыгы килеп чыга. Димәк, алар тигез: $V = abc$, шуны исбат итәргә кирәк иде дә. △



Рәс. 176

1 нче нәтиҗә

Турыпочмаклы параллелепипедның күләме нигез мәйданы белән биеклегенең тапкырчыгышына тигез.

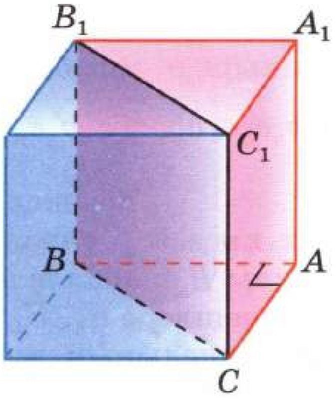
Дөрестән дә, кабыргалары a һәм b булган кырын нигез итеп алыйк. Ул вакытта нигезнең мәйданы $S = ab$ була, ә параллелепипедның биеклеге h исә c га тигез. Шулай булгач,

$$V = abc = Sh.$$

2 нче нәтиҗә

Нигезе турыпочмаклы өчпочмак булган туры призманың күләме нигез мәйданы белән биеклегенең тапкырчыгышына тигез.

Бу раслауны исбатлау өчен, нигезе ABC ($\angle A$ — туры) булган өчпочмаклы туры призманы, 177 нче рәсемдә күрсәтелгәнчә, турыпочмаклы параллелепипедка кадәр җиткерәбез. 1 нче нәтиҗә буенча, бу параллелепипедның күләме $2S_{ABC} \cdot h$ ка тигез, биредә S_{ABC} — ABC өчпочмагының мәйданы, h — призманың биеклеге. B_1BC яссылыгы параллелепипедны ике тигез туры призмага бүлә, аларның берсе — бирелгән параллелепипед. (Бу призмалар тигез, чөнки аларның нигезләре һәм биеклекләре тигез.) Шулай булгач, бирелгән призманың күләме V параллелепипед күләменең яртысына тигез, ягъни: $V = S_{ABC} \cdot h$, шуны исбатларга кирәк иде дә.



Рәс. 177

Искәрмә

Ягы a булган квадратны тикшерик. Пифагор теоремасы буенча, аның диагонале $\sqrt{2}a$ га тигез, шуңа күрә аның өстендә төзелгән квадратның мәйданы бирелгән квадратның мәйданынннан ике тапкырга зуррак. Шулай итеп, мәйданы әлеге квадрат мәйданынннан ике тапкырга зуррак булган квадрат ягын төзү кыенлык тудырмый.

Хәзер ягы a булган кубны тикшерик. Сорау: циркуль һәм линейка ярдәмендә күләме әлеге куб мәйданыннан ике тапкырга зуррак булган кубның ягын төзергә, ягъни $\sqrt[3]{2}a$ га тигез булган кисемтә төзергә буламы? **Кубны икеләтү турындагы мәсьәлә** дип аталып йөртелгән бу мәсьәлә борынгы заманда ук тәгъбирләнгән булган. Ләкин 1837 елда гына француз математигы Пьер Лоран Ванцель (1814—1848) мондый төзүне башкарып булмаганлыгын исбатлаган. Бер үк вакытта аның тарафыннан төзүгә карата тагын бер мәсьәләнең — почмакның трисекциясе (теләсә нинди бирелгән почмакны өч тигез почмакка бүлү) турындагы мәсьәләнең хәл ителмәве исбатланган. Төзүгә карата классик хәл ителмәүче мәсьәләләр рәтенә шулай ук түгәрәкнең квадратурасы (мәйданы бирелгән түгәрәкнең мәйданына тигез булган квадратны төзү) турында мәсьәлә керә. Мондый төзүне башкарып булмаганлыгы 1882 елда немец математигы Карл Луиз Фердинанд Линдеман (1852—1939) тарафыннан исбатланган.

Мәсьәләләр

647. R җисеме тиңдәшле рәвештә күләмнәре V_1 һәм V_2 булган P һәм Q җисемнәреннән тора. а) P һәм Q җисемнәренең уртак эчке нокталары булмаганда; б) P һәм Q җисемнәренең күләме $\frac{1}{3}V_1$ гә тигез булган уртак кисәге булганда, R җисеменең күләме V ны V_1 һәм V_2 аша күрсәтегез.

648 а) $a=11$, $b=12$, $h=15$; б) $a=3\sqrt{2}$, $b=\sqrt{5}$, $h=10\sqrt{10}$; в) $a=18$, $b=5\sqrt{3}$, $h=13$; г) $a=3\frac{1}{3}$, $b=\sqrt{5}$, $h=0{,}96$ булса, нигезенең яклары a һәм b га, биеклеге h ка тигез турыпочмаклы параллелепипедның күләмен табыгыз.

649 а) $AC=12$ см; б) $AC_1=3\sqrt{2}$ м; в) $DE=1$ см (биредә E — AB кабыргасының уртасы) булса, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының күләмен табыгыз.

650 Турыпочмаклы параллелепипедның үлчәнешләре 8 см, 12 см һәм 18 см га тигез. Күләме шушы параллелепипед күләменә тигез булган кубның кабыргасын табыгыз.

651 Кирпеч үлчәнешләре 25 см, 12 см һәм 6,5 см булган турыпочмаклы параллелепипед формасында. Кирпечнең тыгызлыгы 1,8 г/см^3 га тигез. Аның массасын табыгыз.

652 $AC_1=13$ см, $BD=12$ см һәм $BC_1=11$ см булса, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ турыпочмаклы параллелепипедының күләмен табыгыз.

653 Турыпочмаклы параллелепипедның диагонале 18 см га тигез һәм ян кыр яссылыгы белән 30° лы почмак, ә ян кабыргасы белән 45° лы почмак төзи. Параллелепипедның күләмен табыгыз.

654 Турыпочмаклы параллелепипедның диагонале ян кыр яссылыгы белән α почмагы һәм нигез яссылыгы белән β почмагы төзи. Параллелепипедның биеклеге h ка тигез булса, аның күләмен табыгыз.

655 Турыпочмаклы параллелепипедның нигезенең яклары a һәм b га тигез. Параллелепипедның диагонале нигезенең b ягын эченә алган ян кыры белән 30° лы почмак төзи. Параллелепипедның күләмен табыгыз.

656 Турыпочмаклы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедында B_1D диагонале нигез яссылыгы белән 45° лы почмак төзи, ә икекырлы A_1B_1BD почмагы 60° ка тигез. Нигезенең диагонале 12 см га тигез булса, параллелепипедның күләмен табыгыз.

657 а) $AC_1 = 1$ м, $\angle C_1AC = 45°$, $\angle C_1AB = 60°$; б) $AC_1 = 24$ см, $\angle C_1AA_1 = 45°$, AC_1 диагонале ян кыр яссылыгы белән 30° лы почмак төзесә, турыпочмаклы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедының күләмен табыгыз.

658 $\angle BAC = 90°$, $BC = 37$ см, $AB = 35$ см, $AA_1 = 1{,}1$ дм булса, туры $ABCA_1B_1C_1$ призмасының күләмен табыгыз.

§ 2 Туры призманың һәм цилиндрның күләме

76 Туры призманың күләме

Теорема

Туры призманың күләме нигезенең мәйданы белән биеклегенең тапкырчыгышына тигез.

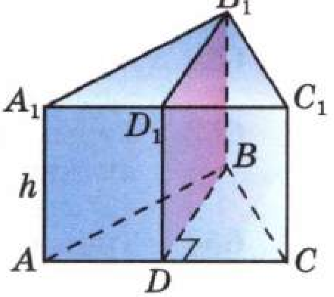
Исбатлау

Башта теореманы өчпочмаклы туры призма өчен, аннары ирекле рәвештә алынган туры призма өчен исбатларбыз.

1. Күләме V, биеклеге h булган өчпочмаклы туры $ABCA_1B_1C_1$ призмасын тикшерик. ABC өчпочмагын ике өчпочмакка бүлә торган биеклек (178 нче рәсемдә BD кисемтәсе) үткәрик (өчпочмакның кимендә бер биеклеге бу шартны канәгатьләндерә). BB_1D яссылыгы бирелгән призманы нигезләре турыпочмаклы ABD һәм BDC өчпочмаклары булган ике призмага бүлә. Шуңа күрә бу призмаларның күләмнәре V_1 һәм V_2 тиңдәшле рәвештә $S_{ABD} \cdot h$ һәм $S_{BDC} \cdot h$ ка тигез. Күләмнәрнең 2^0 үзлеге буенча, $V = V_1 + V_2$, ягъни $V = S_{ABD} \cdot h + S_{BDC} \cdot h = (S_{ABD} + S_{BDC}) \cdot h$. Шул рәвешле,

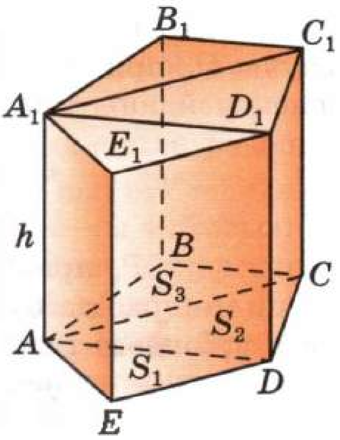
$$V = S_{ABC} \cdot h. \quad (1)$$

2. Хәзер теореманы биеклеге h һәм нигез мәйданы S булган ирекле рәвештә алынган туры призма өчен исбатлыйк. Андый призманы биеклеге h ка тигез булган өчпочмаклы туры призмаларга бүләргә мөмкин.



Рәс. 178

Мәсәлән, 179 нчы рәсемдә бишпочмаклы призма сурәтләнгән, ул өч өчпочмаклы туры призмага бүленгән. Һәр өчпочмаклы призманың күләмен (1) формуласы буенча күрсәтәбез һәм бу күләмнәрне кушабыз. Уртак тапкырлаучы h ны җәя тышына чыгарып, җәя эчендә өчпочмаклы призмаларның нигез мәйданнарының суммасын, ягъни баштагы призманың нигез мәйданы S ны табабыз. Шул рәвешле, баштагы призманың күләме $S \cdot h$ тапкырчыгышына тигез. Теорема исбатланды. △



Рәс. 179

77 Цилиндрның күләме

Призманың нигезләре цилиндр нигезләренә камалган булса, аны **цилиндрга камалган** диләр (рәс. 180, *а*), ә призманың нигезләре цилиндрның нигезләрен камаса, аны **цилиндрны камаучы** диләр (рәс. 180, *б*). Цилиндрга камаулы яки аны камаучы теләсә нинди призманың биеклеге цилиндр биеклегенә тигез булуы үзеннән-үзе аңлашыла.

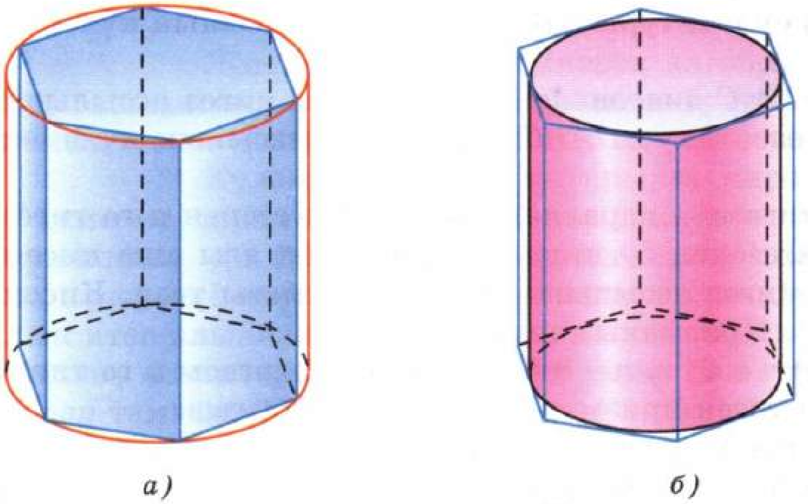
Теорема

Цилиндрның күләме нигезенең мәйданы белән биеклегенең тапкырчыгышына тигез.

▼ **Исбатлау**

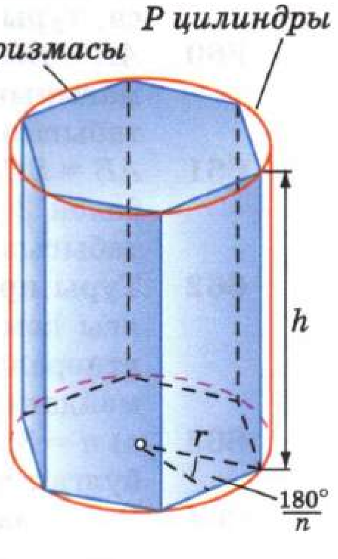
Радиусы r һәм биеклеге h булган бирелгән P цилиндры эченә n-почмаклы төзек P_n призмасын камыйбыз (рәс. 181). Бу призманың нигезе мәйданы S_n түбәндәге формула белән белдерелә:

$$S_n = nr\sin\frac{180°}{n} r\cos\frac{180°}{n}.$$


а)
Цилиндрга камаулы призма

б)
Цилиндрны камаучы призма

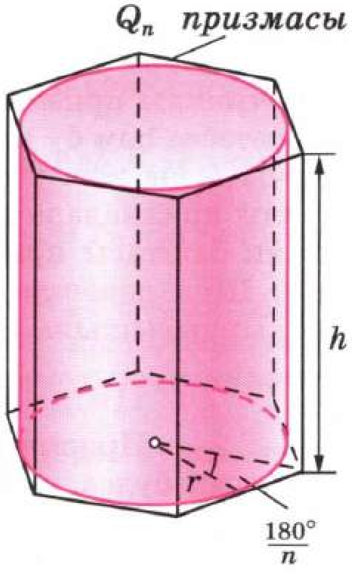
Рәс. 180



Рәс. 181

P_n призмасы белән бергә P цилиндрын камаучы Q_n призмасын тикшерик (рәс. 182). Аның нигезенең мәйданы түбәндәгегә тигез:

$$nr\,\mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{n}\,r = \frac{S_n}{\cos^2\frac{180^\circ}{n}}.$$



Рәс. 182

P_n призмасы P цилиндрында, ә P цилиндры Q_n цилиндрында булганлыктан, P цилиндрының күләме V түбәндәге тигезсезлекләрне канәгатьләндерә:

$$S_n \cdot h < V < \frac{S_n}{\cos^2\frac{180^\circ}{n}} \cdot h. \qquad (2)$$

n санын чиксез зурайтабыз. $n\,\infty$ кә омтылганда, $\cos\frac{180^\circ}{n} \to 1$, ә $S_n \to \pi r^2$ булганлыктан, (2) тигезсезлегенең уң һәм сул кисәкләре $\pi r^2 h$ зурлыгына омтылалар. Шулай итеп,

$$V = \pi r^2 h. \qquad (3)$$

Цилиндр нигезенең мәйданы πr^2 ны S хәрефе белән тамгалап, (3) формуласыннан табабыз:

$$V = S \cdot h.$$

Теорема исбатланды. △

Сораулар һәм мәсьәләләр

659 а) $\angle BAC = 120^\circ$, $AB = 5$ см, $AC = 3$ см һәм ян кырлары мәйданнарының иң зурысы 35 см^2 га тигез; б) $\angle AB_1C = 60^\circ$, $AB_1 = 3$, $CB_1 = 2$, BB_1 кабыргасы янындагы икекырлы почмагы туры булса, туры $ABCA_1B_1C_1$ призмасының күләмен табыгыз.

660 $AB = BC = m$, $\angle ABC = \varphi$ һәм $BB_1 = BD$ (биредә BD — ABC өчпочмагының биеклеге) булса, туры $ABCA_1B_1C_1$ призмасының күләмен табыгыз.

661 $AB = BC$, $\angle ABC = \alpha$, A_1C диагонале l га тигез һәм нигез яссылыгы белән β почмагы тәзесә, туры $ABCA_1B_1C_1$ призмасының күләмен табыгыз.

662 Туры призманың нигезе — параллелограмм. Нигезенең a га тигез ягы һәм икенче нигезенең бу якка каршы яткан ягы аша кисем үткәрелгән, кисем нигез яссылыгы белән β почмагы төзи. Кисем мәйданы Q га тигез. Призманың күләмен табыгыз.

663 а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$; г) $n = 8$ булса, һәр кабыргасы a га тигез булган n-почмаклы төзек призманың күләмен табыгыз.

664 Өчпочмаклы төзек призманың аскы нигезенең ягы һәм өске нигезенең аңа каршы яткан түбәсе аша нигез яссылыгы белән 60° лы почмак төзүче кисем үткәрелгән. Нигезенең ягы a га тигез булса, призманың күләмен табыгыз.

665 Алтыпочмаклы төзек призманың иң зур диагонале 8 см га тигез һәм ян кабырга белән 30° лы почмак төзи. Призманың күләмен табыгыз.

666 Цилиндрның күләме, радиусы һәм биеклеге тиңдәшле рәвештә V, r һәм h булсын. а) $r = 2\sqrt{2}$ см, $h = 3$ см булса, V ны; б) $V = 120$ см^3, $h = 3{,}6$ см булса, r ны; в) $r = h$, $V = 8\pi$ см^3 булса, h ны табыгыз.

667 4 мм диаметрлы алюмин үткәргечнең массасы 6,8 кг. Үткәргечнең озынлыгын табыгыз (алюминның тыгызлыгы 2,6 г/см^3).

668 Нефтьнең тыгызлыгы 0,85 г/см^3 булса, диаметры 18 м, биеклеге 7 м булган цилиндрик цистернага күпме микъдардагы (тонналарда) нефть сыя?

669 Цилиндрның нигез мәйданы Q га, ә күчәр кисеменең мәйданы S ка тигез. Цилиндрның күләмен табыгыз.

670 Стенасының калынлыгы 4 мм булган кургаш торбаның (кургашның тыгызлыгы 11,4 г/см^3) эчке диаметры 13 мм. Торбаның озынлыгы 25 м булса, аның массасын табыгыз.

671 Цилиндрга n-почмаклы төзек призма камалган. а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$; г) $n = 8$; д) n ирекле алынган бөтен сан булса, призма һәм цилиндрның күләмнәре чагыштырмасын табыгыз.

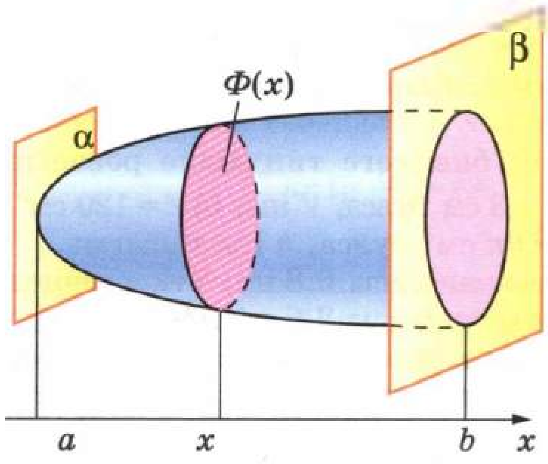
672 Цилиндрга нигезе турыпочмаклы өчпочмак булган призма камалган, өчпочмакның катеты a га, ә шул катет янындагы почмагы α га тигез. Призманың биеклеге h ка тигез булса, цилиндрның күләмен табыгыз.

§3 Авыш призманың, пирамиданың һәм конусның күләме

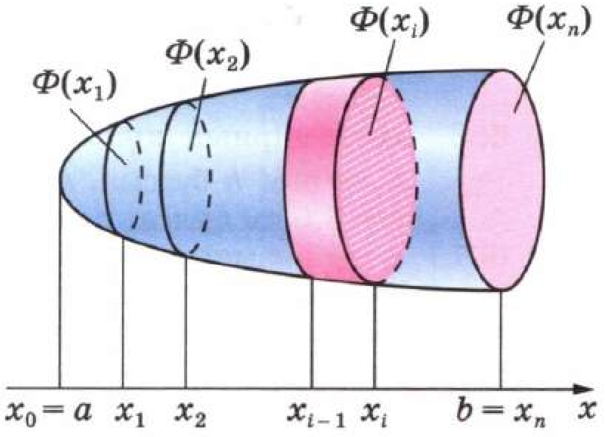
78 Җисемнәрнең күләмнәрен анык интеграл ярдәмендә исәпләү

Җисемнәрнең күләмнәрен алгебра һәм анализ башлангычлары курсыннан билгеле булган интеграл төшенчәсенә нигезләнеп исәпләү ысулын тикшерик.

Күләмен исәпләп чыгарырга кирәк булган T җисеме параллель α һәм β яссылыклары арасында урнашсын, ди (рәс. 183). Координаталар системасын Ox күчәре α һәм β яссылыкларына перпендикуляр булырлык итеп алыйк һәм Ox күчәренең бу яссылыклар белән кисешү нокталарының абсциссаларын a һәм b хәрефләре белән тамгалыйк ($a < b$). Җисемнең x абсциссалы нокта аша Ox күчәренә перпендикуляр үтүче яссылык белән кисеме $\Phi(x)$ я түгәрәк, я теләсә нинди $x \in [a; b]$ өчен күппочмак була дип исәпләрбез (кисем, $x = a$ һәм $x = b$ булганда, ноктага әйләнергә мөмкин, мәсәлән, 183 нче



Рәс. 183



Рәс. 184

рәсемдә $x = a$ булгандагы кебек). $\Phi(x)$ фигурасының мәйданын $S(x)$ аша тамгалап, $S(x)$ ны исә $[a; b]$ санлы кисемтәсендә өзлексез функция дип уйлыйк.

▼ $[a; b]$ санлы кисемтәсен $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ нокталары белән n тигез кисемтәгә бүләбез һәм x_i абсциссалы нокталар аша Ox күчәренә перпендикуляр яссылыклар үткәрәбез (рәс. 184). Бу яссылыклар T җисемен n җисемгә бүлә: $T_1, T_2, \ldots, T_n$.

Әгәр $\Phi(x_i)$ кисеме түгәрәк булса, ул вакытта T_i җисеменең күләме (184 нче рәсемдә кызыл төс белән күрсәтелгән) якынча нигезе $\Phi(x_i)$ һәм биеклеге $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$ булган цилиндр күләменә тигез.

Әгәр $\Phi(x_i)$ күппочмак булса, ул вакытта T_i җисеменең күләме якынча нигезе $\Phi(x_i)$ һәм биеклеге Δx_i булган туры призманың күләменә тигез.

Һәр ике очракта да T_i җисеменең күләме якынча $S(x_i) \cdot \Delta x_i$ гә тигез, ә T җисеменең тулаем күләме V ны якынча түбәндәге формула буенча исәпләргә мөмкин:

$$V \approx V_n = \sum_{i=1}^{n} S(x_i)\Delta x_i.$$

T җисеменең күләме V_n ның якынча кыйммәте n зуррак булган саен, димәк Δx_i кечерәк булган саен, төгәлрәк булыр. Исбатламыйча гына, $\lim\limits_{n\to\infty} V_n$ җисеменең күләменә тигез, ягъни $V = \lim\limits_{n\to\infty} V_n$ дип кабул итәрбез.

Икенче яктан, V_n суммасы $S(x)$ өзлексез функциясе өчен $[a; b]$ санлы кисемтәсендә интеграль сумма булып тора, шуңа күрә

$$\lim_{n \to \infty} V_n = \int_a^b S(x)\,dx. \quad \triangle$$

Нәтиҗәдә, җисемнең күләмен интеграл ярдәмендә исәпләү өчен, түбәндәге формула килеп чыга:

$$V = \int_a^b S(x)\,dx.$$

Аны, **җисемнәрнең күләмнәрен исәпләү өчен, төп формула** дип атарбыз. Бу формуладан файдаланып, III һәм VI бүлекләрдә өйрәнелгән кайбер җисемнәрнең күләмнәрен исәпләп чыгарыйк.

▼ **Искәрмә**

Җисемнәрнең күләмнәрен исәпләү өчен булган төп формуладан **охшаш җисемнәрнең күләмнәре чагыштырмасы охшашлык коэффициентының кубына тигез** булуы килеп чыга. Моны ничек исбатларга була, уйлап карагыз. △

79 Авыш призманың күләме

Теорема

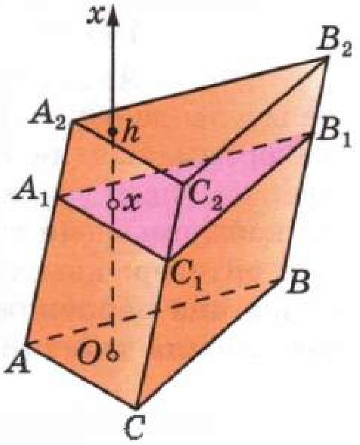
Авыш призманың күләме нигезе мәйданы белән биеклегенең тапкырчыгышына тигез.

▼ **Исбатлау**

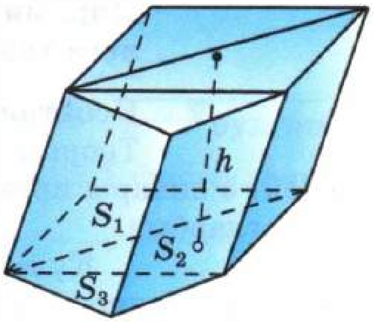
Башта теореманы өчпочмаклы призма өчен, ә аннары теләсә нинди призма өчен исбатларбыз.

1. Күләме V, нигез мәйданы S һәм биеклеге h булган өчпочмаклы призманы тикшерик. Призма нигезләренең берсендә O ноктасы билгелибез һәм Ox күчәрен нигезләргә перпендикуляр итеп юнәлтәбез (рәс. 185, *а*). Призманың Ox күчәренә перпендикуляр һәм, димәк, нигез яссылыгына параллель булган яссылык белән кисемен тикшерик. Бу яссылыкның Ox күчәре белән кисешү ноктасының абсциссасын — x хәрефе белән, ә кисем мәйданын $S(x)$ аша тамгалыйбыз.

$S(x)$ мәйданы призма нигезенең мәйданы S ка тигез икәнен исбатларбыз. Моның өчен ABC (призманың нигезе) һәм $A_1B_1C_1$ (призманың тикшерелә торган яссылык белән кисеме) өчпочмакларының тигез икәнен искәртик. Дөрестән дә, AA_1B_1B дүртпочмагы — параллелограмм (AA_1 һәм BB_1 кисемтәләре тигез һәм параллель), шуңа күрә $A_1B_1 = AB$. $B_1C_1 = BC$ һәм $A_1C_1 = AC$ икәнлеге аналогик рәвештә исбатлана.



а)



$V = (S_1 + S_2 + S_3)h = Sh$

б)

Рәс. 185

Шулай итеп, $A_1B_1C_1$ һәм ABC өчпочмаклары өч ягы буенча тигез. Димәк, $S(x) = S$. Хәзер җисемнәрнең күләмнәрен исәпләү өчен, төп формуланы $a = 0$ һәм $b = h$ булганда кулланып табабыз:

$$V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h S dx = S\int_0^h dx = S \cdot x \Big|_0^h = S \cdot h.$$

2. Хәзер теореманы биеклеге h һәм нигез мәйданы S булган ирекле рәвештә алынган призма өчен исбатларбыз. Андый призманы биеклеге h уртак булган өчпочмаклы призмаларга бүлгәләргә мөмкин (185, *б* рәсемендә бишпочмаклы призманы бүлгәләү күрсәтелгән). Һәр өчпочмаклы призманың күләмен исбатлаган формула ярдәмендә күрсәтәбез һәм бу күләмнәрне кушабыз. Уртак тапкырлаучы h ны җәя тышына чыгарып, өчпочмаклы призмаларның нигезләре мәйданнарының суммасын, ягъни бирелгән призманың нигез мәйданы S ны табабыз. Шулай итеп, бирелгән призманың күләме $S \cdot h$ ка тигез. Теорема исбатланды. △

Искәрмә

Авыш призманың күләмен исәпләүнең икенче ысулы да бар, атап әйткәндә, авыш призманың күләме призманың ян кабыргаларына перпендикуляр һәм аларны кисеп үтүче яссылык кисеменең мәйданы белән ян кабыргасының тапкырчыгышына тигез. Кыскача болай әйтәләр: **авыш призманың күләме ян кабыргасы белән аңа перпендикуляр кисем мәйданының тапкырчыгышына тигез** (682 нче мәсьәләне кара).

80 Пирамиданың күләме

Теорема

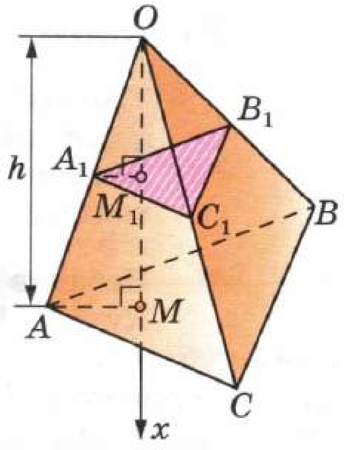
Пирамиданың күләме нигезенең мәйданы белән биеклеге тапкырчыгышының өчтән беренә тигез.

▼ **Исбатлау**

Теореманы башта өчпочмаклы пирамида өчен, ә аннары ирекле рәвештә алынган пирамида өчен исбатларбыз.

1. Күләме V, нигез мәйданы S һәм биеклеге h булган өчпочмаклы $OABC$ пирамидасын тикшерик. Ox күчәре үткәрик (рәс. 186, *а*, бирелә OM — пирамиданың биеклеге) һәм пирамиданың Ox күчәренә перпендикуляр һәм, димәк, нигез яссылыгына параллель яссылык белән кисеме $A_1B_1C_1$ не карыйк. Бу яссылыкның

Ox күчәре белән кисешү ноктасы M_1 нең абсциссасын — x аша, ә кисем мәйданын $S(x)$ аша тамгалыйк. $S(x)$ ны S, h һәм x аша күрсәтәбез. $A_1B_1C_1$ һәм ABC өчпочмакларының охшаш икәнлеген күрәбез. Дөрестән дә, $A_1B_1 \parallel AB$, шуңа күрә $\Delta OA_1B_1 \sim \Delta OAB$. Шулай булгач, $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{OA_1}{OA}$. OA_1M_1 һәм OAM турыпочмаклы өчпочмаклары охшаш (алар түбәсе O булган уртак кысынкы почмакка ия). Шуңа күрә $\frac{OA_1}{OA} = \frac{OM_1}{OM} = \frac{x}{h}$. Шулай итеп, $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{x}{h}$. $\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{x}{h}$ һәм $\frac{C_1A_1}{CA} = \frac{x}{h}$ икәнлеге нәкъ шулай ук исбатлана. Шулай итеп, $A_1B_1C_1$ һәм ABC өчпочмаклары охшаш, аларның охшашлык коэффициенты $\frac{x}{h}$ ка тигез. Шулай булгач, $\frac{S(x)}{S} = \left(\frac{x}{h}\right)^2$, яки $S(x) = \frac{S}{h^2}x^2$.

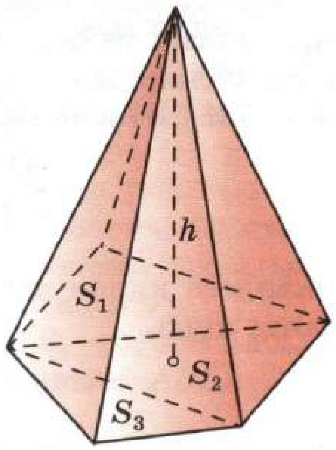


а)

Хәзер төп формуланы, $a = 0$, $b = h$ булганда, җисемнәрнең күләмнәрен исәпләү өчен кулланып табабыз:

$$V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h \frac{S}{h^2}x^2dx = \frac{S}{h^2}\int_0^h x^2dx = \frac{S}{h^2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{1}{3}S \cdot h.$$

2. Хәзер теореманы биеклеге h, нигез мәйданы S булган теләсә нинди пирамида өчен исбатларбыз. Андый пирамиданы h биеклеге уртак булган өчпочмаклы пирамидаларга бүлгәләргә мөмкин (186, б рәсемендә бишпочмаклы пирамиданы бүлгәләү күрсәтелгән). Һәр өчпочмаклы пирамиданың күләмен әле исбатлаган формула ярдәмендә табып, ул күләмнәрне кушабыз. Уртак тапкырлаучы $\frac{1}{3}h$ ны җәя тышына чыгарып, җәя эчендә өчпочмаклы пирамидаларның нигез мәйданнары суммасын, ягъни башта бирелгән пирамиданың нигез мәйданы S ны табабыз. Шулай итеп, пирамиданың күләме $\frac{1}{3}Sh$ ка тигез. Теорема исбатланды. △



$V = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + S_3)h = \frac{1}{3}Sh$

б)

Рәс. 186

Нәтиҗә

Биеклеге h ка, ә нигез мәйданнары S һәм S_1 гә тигез булган кисек пирамиданың күләме $V = \frac{1}{3}h(S + S_1 + \sqrt{S \cdot S_1})$ формуласы буенча исәпләп табыла.

Кисек пирамида гадәти пирамидадан кечерәк пирамиданы кисеп алу юлы белән табылудан һәм, шулай булгач, кисек пирамиданың күләме бирелгән пирамида белән кисеп алынган пирамиданың күләмнәре аермасына тигез булудан файдаланып, бу формуланы мөстәкыйль рәвештә чыгарыгыз.

81 Конусның күләме

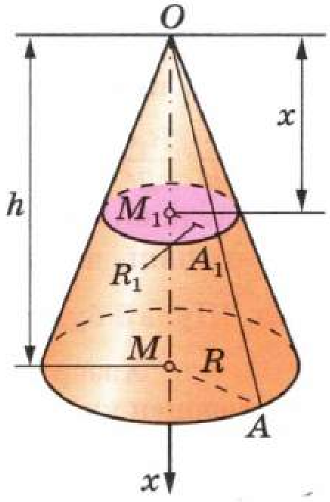
Теорема

Конусның күләме нигезенең мәйданы белән биеклеге тапкырчыгышының өчтән берен тигез.

Исбатлау

Күләме V, нигезенең радиусы R, биеклеге h һәм түбәсе O ноктасында булган конусны тикшерербез. Ox күчәрен 187 нче рәсемдә күрсәтелгәнчә бирәбез (OM — конусның күчәре). Конусның Ox күчәренә перпендикуляр теләсә нинди яссылык белән киселе шул яссылыкның Ox күчәре белән кисешү ноктасы M_1 үзәге булган түгәрәк була (п. 61). Бу түгәрәкнең радиусын — R_1, ә кисем мәйданын $S(x)$ аша (биредә x — M_1 ноктасының абсциссасы) тамгалыйбыз. Турыпочмаклы OM_1A_1 һәм OMA өчпочмакларының охшашлыгыннан

$$\frac{OM_1}{OM} = \frac{R_1}{R}, \text{ яки } \frac{x}{h} = \frac{R_1}{R}$$



Рәс. 187

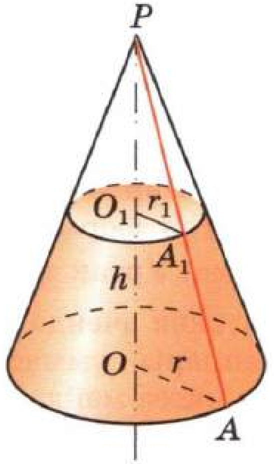
икәнлеге килеп чыга, моннан $R_1 = \frac{R}{h}x$. $S(x) = \pi R_1^2$ булганга күрә,

$$S(x) = \frac{\pi R^2}{h^2}x^2.$$

Җисемнәрнең күләмнәрен исәпләү өчен, $a = 0$, $b = h$ булганда, төп формуланы кулланып табабыз:

$$V = \int_0^h \frac{\pi R^2}{h^2}x^2dx = \frac{\pi R^2}{h^2}\int_0^h x^2dx = \frac{\pi R^2}{h^2}\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

Конусның нигез мәйданы $S = \pi R^2$, шуңа күрә $V = \frac{1}{3}Sh$. Теорема исбатланды. △



Рәс. 188

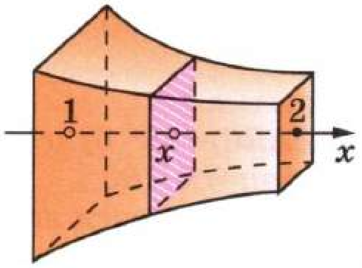
Нәтиҗә

Биеклеге h ка, ә нигез мәйданнары S һәм S_1 гә тигез булган кисек конусның күләме

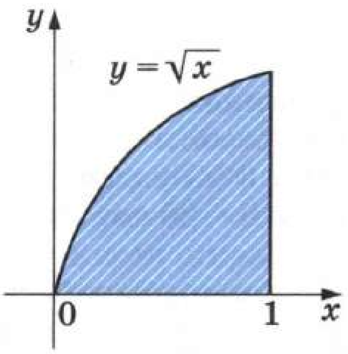
$$V = \frac{1}{3}h\,(S + S_1 + \sqrt{S \cdot S_1})$$

формуласы буенча исәпләп табыла.

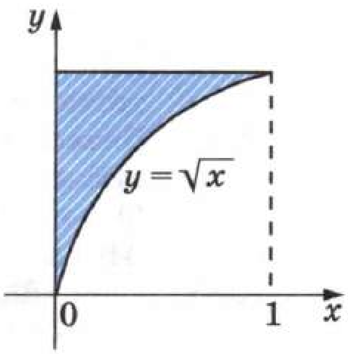
188 нче рәсемнән файдаланып, бу формуланы мөстәкыйль рәвештә чыгарыгыз.



Рәс. 189



Рәс. 190



Рәс. 191

Мәсьәләләр

673 189 нчы рәсемдә сурәтләнгән җисемнең Ox күчәренә перпендикуляр һәм x абсциссалы нокта аша үтүче яссылык белән киселеше — ягы $\frac{1}{x}$ ка тигез булган квадрат. Бу җисемнең күләмен табыгыз.

674 *190 нчы* рәсемдәге штрихланып күрсәтелгән *фигура* Ox күчәре тирәсендә әйләнә. Килеп чыккан җисемнең күләмен табыгыз.

675 191 *нче рәсемдәге штрихланып* күрсәтелгән *фигура* Oy *күчәре тирәсендә* әйләнә. Килеп чыккан җисемнең күләмен табыгыз.

676 Нигезендә яклары 10 см, 10 см һәм 12 см булган өчпочмак яткан авыш призманың 8 см га тигез ян кабыргасы нигез яссылыгы белән 60° лы почмак төзи. Призманың күләмен табыгыз.

677 $AB = BC = CA = a$, ABB_1A_1 — ромб, $AB_1 < BA_1$, $AB_1 = b$, AB кабыргасындагы икекырлы почмагы туры булган авыш $ABCA_1B_1C_1$ призмасының күләмен табыгыз.

678 Ягы m булган тигезьяклы ABC өчпочмагы — $ABCA_1B_1C_1$ призмасының нигезе. A_1 түбәсе бу нигезнең үзәгенә проекцияләнә, ә AA_1 кабыргасы нигез яссылыгы белән φ почмагы төзи. Призманың күләмен табыгыз.

679 Катетлары $AB = 7$ см һәм $AC = 24$ см булган турыпочмаклы ABC өчпочмагы авыш $ABCA_1B_1C_1$ призмасының нигезе булып тора. A_1 түбәсе A, B һәм C түбәләреннән тигез ераклыкта ята. AA_1 кабыргасы нигез яссылыгы белән 45° лы почмак төзесә, призманың күләмен табыгыз.

680 Авыш параллелепипедның нигезендә яклары a һәм b булган турыпочмаклык ята. c озынлыгындагы ян кабыргасы нигезенең чиктәш яклары белән φ гә тигез почмаклар төзи. Параллелепипедның күләмен табыгыз.

681 Параллелепипедның барлык кырлары да — диагональләре 6 см һәм 8 см булган тигез ромблар. Параллелепипедның күләмен табыгыз.

682 Авыш призманың күләме аның ян кабыргаларына перпендикуляр һәм аларны кисеп үтүче яссылык киселешенең мәйданы белән ян кабыргасының тапкырчыгышына тигез икәнен исбатлагыз.

683 Өчпочмаклы авыш призманың ян кабыргалары арасындагы ераклыклар 37 см, 13 см һәм 30 см га, ә ян өслеге мәйданы 480 см^2 га тигез булса, аның күләмен табыгыз.

684 Биеклеге h булган пирамиданың күләмен табыгыз:
а) $h = 2$ м, нигезе ягы 3 м булган квадрат;
б) $h = 2{,}2$ м, нигезе $AB = 20$ см, $BC = 13{,}5$ см, $\angle ABC = 30°$ булган ABC өчпочмагы.

685 Өчпочмаклы төзек пирамиданың биеклеге 12 см га, нигезенең ягы 13 см га тигез. Пирамиданың күләмен табыгыз.

686 Өчпочмаклы төзек пирамиданың ян кабыргасы l га тигез. а) Ян кабыргасы нигез яссылыгы белән φ почмагы төзесә; б) ян кабыргасы нигезенең янәшә яткан ягы белән α почмагы төзесә; в) түбә янындагы яссы почмагы β га тигез булса, пирамиданың күләмен табыгыз.

687 Өчпочмаклы төзек пирамиданың түбә янындагы яссы почмагы φ гә, ә нигезенең ягы a га тигез. Пирамиданың күләмен табыгыз.

688 Дүртпочмаклы төзек пирамиданың: а) биеклеге H ка, ә нигез янындагы икекырлы почмагы β га тигез; б) нигезенең ягы m га, ә түбә янындагы яссы почмагы α га тигез булса, аның күләмен табыгыз.

689 Дүртпочмаклы төзек пирамиданың ян кабыргасы m га тигез, һәм ул нигез яссылыгы белән φ почмагы төзи. Пирамиданың күләмен табыгыз.

690 Алтыпочмаклы төзек пирамиданың ян кабыргасы 13 см га, ә нигезенә камаулы түгәрәкнең радиусы 6 см га тигез. Пирамиданың күләмен һәм ян өслеге мәйданын табыгыз.

691 Пирамиданың нигезе булып тигезьянлы ABC өчпочмагы хезмәт итә, анда $AB = BC = 13$ см, $AC = 10$ см. Пирамиданың һәр ян кабыргасы аның биеклеге белән 30° лы почмак төзи. Пирамиданың күләмен исәпләп чыгарыгыз.

692 Пирамиданың нигезендә катетлары a һәм b булган турыпочмаклы өчпочмак ята. Аның һәр ян кабыргасы нигез яссылыгына φ почмагы ясап авышкан. Пирамиданың күләмен табыгыз.

693 Пирамидага шар камап булса, аның күләмен $V = \frac{1}{3} S \cdot r$ формуласы буенча исәпләргә мөмкин булуын исбатлагыз, биредә S — пирамиданың тулы өслеге мәйданы, ә r — пирамидага камалган шар радиусы.

694 Пирамиданың нигезе булып ягы 6 см га тигез ромб хезмәт итә. Нигез янындагы икекырлы почмакларының һәркайсы 45° ка тигез. Пирамиданың биеклеге 1,5 см булса, аның күләмен табыгыз.

695 Өчпочмаклы $SABC$ пирамидасында: а) $\angle CAB = 90°$, $BC = c$, $\angle ABC = \varphi$ һәм һәр ян кабыргасы нигез яссылыгы белән θ почмагы төзесә; б) $AB = 12$ см, $BC = CA = 10$ см һәм нигез янындагы икекырлы почмаклары 45° ка тигез булса; в) ян кабыргалары

пар-пар перпендикуляр һәм a, b, c озынлыкларына ия булса, аның күләмен табыгыз.

696 $DABC$ пирамидасының нигезендә $AB = 20$ см, $AC = 29$ см, $BC = 21$ см булган өчпочмак ята. DAB һәм DAC кырлары нигез яссылыгына перпендикуляр, ә DBC кыры нигез белән $60°$ лы почмак төзи. Пирамиданың күләмен табыгыз.

697 Өчпочмаклы төзек кисек пирамидада нигезенең яклары a һәм $0{,}5a$ га, ә ян кырының апофемасы a га тигез. Кисек пирамиданың күләмен табыгыз.

698 Кисек пирамиданың нигезләре — гипотенузалары m һәм n га тигез булган ($m > n$) тигезьянлы турыпочмаклы өчпочмаклар. Катетларны эченә алган ике ян кыры нигезгә перпендикуляр, ә өченчесе нигез белән φ почмагы төзи. Кисек пирамиданың күләмен табыгыз.

699 Пирамиданың нигезендә катетлары 24 дм һәм 18 дм га тигез булган турыпочмаклы өчпочмак ята. Һәр ян кабыргасы 25 дм га тигез. Пирамида ян кабыргасын урталай бүлүче һәм нигез яссылыгына параллель яссылык белән кистерелгән. Килеп чыккан кисек пирамиданың күләмен табыгыз.

700 Дүртпочмаклы төзек кисек пирамидада нигезләренең яклары 6 см һәм 4 см га тигез, ә пирамиданың бер кырныкы булмаган ике ян кабыргасы аша үтүче яссылык белән кисеменең мәйданы 15 $см^2$ га тигез. Кисек пирамиданың күләмен табыгыз.

701 Конусның биеклеге, нигез радиусы һәм күләме тиндәшле рәвештә h, r һәм V га тигез. а) $h = 3$ см, $r = 1{,}5$ см булса, V ны; б) $r = 4$ см, $V = 48\pi$ $см^3$ булса, h ны; в) $h = m$, $V = p$ булса, r ны табыгыз.

702 Конусның биеклеге 5 см га тигез. Аны түбәсеннән 2 см ераклыкта нигезенә параллель яссылык кисеп үтә. Кисеп алынган кечерәк конусның күләме 24 $см^3$ га тигез булса, бирелгән конусның күләмен табыгыз.

703 Конусның нигез мәйданы Q га, ян өслегенең мәйданы P га тигез булса, конусның күләмен табыгыз.

704 Конусның биеклеге аның нигез диаметрына тигез. Конусның биеклеге H ка тигез булса, аның күләмен табыгыз.

705 Конусның төзүчесе 13 см га, ә күчәр кисеменең мәйданы 60 $см^2$ га тигез булса, конусның күләмен табыгыз.

706 Конусның биеклеге 12 см га, күләме 324π $см^3$ га тигез. Конусның ян өслеген яссылыкта җәюдән килеп чыккан секторның почмагын табыгыз.

707 Конусның тулы өслеге мәйданы 45π $дм^2$ га тигез. Конусның яссылыкка җәелгән ян өслеге почмагы $60°$ булган сектордан гыйбарәт. Конусның күләмен табыгыз.

708 Кисек конусның нигез радиуслары 3 м һәм 6 м га, ә төзүчесе 5 м га тигез. Кисек конусның күләмен табыгыз.

709 Кисек конусның биеклеге h, төзүчесе l, ян өслеге мәйданы S булуы билгеле. Конусның күчәр кисеме мәйданын һәм күләмен табыгыз.

§4 Шарның күләме һәм сфераның мәйданы

82 Шарның күләме

Теорема

***R* радиуслы шарның күләме $\frac{4}{3}\pi R^3$ ка тигез.**

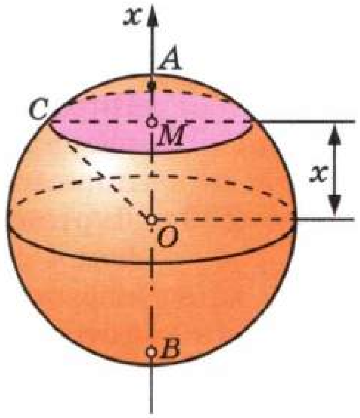
Исбатлау

Үзәге O ноктасында булган R радиуслы шарны карыйк һәм Ox күчәрен ирекле рәвештә сайлап алыйк (рәс. 192). Шарның Ox күчәренә перпендикуляр һәм шул күчәрнең M ноктасы аша үтүче яссылык белән кисеме үзәге M ноктасында булган түгәрәк була. Бу түгәрәкнең радиусын r, ә мәйданын $S(x)$ аша тамгалыйк (биредә x — M ноктасының абсциссасы). $S(x)$ ны x һәм R аша күрсәтик. Турыпочмаклы OMC өчпочмагыннан табабыз:

$$r = \sqrt{OC^2 - OM^2} = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

$S(x) = \pi r^2$ булганга,

$$S(x) = \pi(R^2 - x^2). \qquad (1)$$



Рәс. 192

Бу формуланың AB диаметрында M ноктасының теләсә нинди торышы өчен, ягъни $-R \leqslant x \leqslant R$ шартын канәгатьләндерүче барлык x лар өчен, дөрес икәнен искәрик. $a = -R$, $b = R$ булганда, җисемнәрнең күләмнәрен исәпләү өчен, төп формуланы кулланып табабыз:

$$V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)\,dx = \pi R^2 \int_{-R}^{R} dx - \pi \int_{-R}^{R} x^2 dx =$$

$$= \pi R^2 x \Big|_{-R}^{R} - \frac{\pi x^3}{3}\Big|_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Теорема исбатланды. △

83 Шар сегментының, шар катламының һәм шар секторының күләме

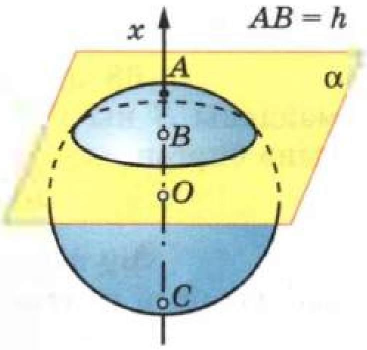
а) Шарның нинди дә булса яссылык белән кистереп алынган кисәге **шар сегменты** дип атала. 193 нче рәсемдә B ноктасы аша үткән кисүче α яссылыгы шарны ике шар сегментына бүлә. Кисемдә килеп чыккан

түгәрәк һәр ике сегментның да **нигезе** дип атала, ә кисүче яссылыкка перпендикуляр булган AC диаметрының AB һәм BC кисемтәләренең озынлыклары сегментларның **биеклекләре** дип атала.

Әгәр шарның радиусы R га, ә сегментның биеклеге h ка тигез булса (193 нче рәсемдә $h = AB$), шар сегментының күләме

$$V = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right)$$

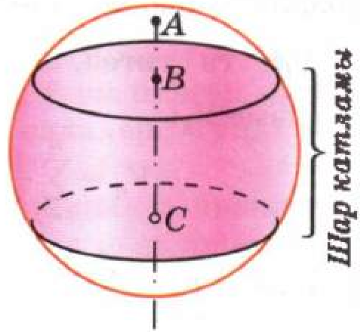
формуласы буенча исәпләп табыла.



Шар сегменты
Рәс. 193

▼α яссылыгына перпендикуляр итеп, Ox күчәре үткәрик (рәс. 193). Ул вакытта шар сегментының Ox күчәренә перпендикуляр итеп үткәрелгән теләсә нинди кисеменең $R - h \leqslant x \leqslant R$ булгандагы мәйданы $S(x)$ **(1)** формуласы белән аңлатыла. Җисемнәрнең күләмнәрен исәпләү өчен, төп формуланы $a = R - h$, $b = R$ булганда кулланып табабыз:

$$V = \pi\int_{R-h}^{R}(R^2 - x^2)dx = \pi\left(R^2x - \frac{x^3}{3}h\right)\Big|_{R-h}^{R} = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right). \ \triangle$$



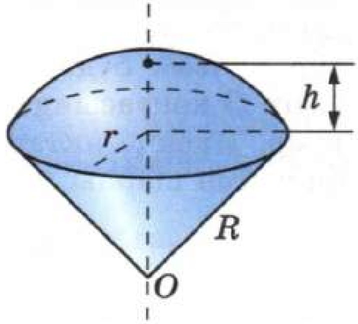
Рәс. 194

б) Шарның параллель ике кисүче яссылык арасында урнашкан кисәге **шар катламы** дип атала (рәс. 194). Шарны бу яссылыклар белән кистергәндә килеп чыккан түгәрәкләр шар катламының **нигезләре** дип атала, ә шул яссылыклар арасындагы ераклык шар катламының **биеклеге** дип атала.

Шар катламының күләмен ике шар сегментының күләмнәре аермасы буларак исәпләп табарга мөмкин. Мәсәлән, 194 нче рәсемдә шар катламының күләме биеклекләре AC һәм AB га тигез булган шар сегментларының күләмнәре аермасына тигез.

в) Почмагы 90° тан кечерәк булган түгәрәк секторын аны чикләүче радиусларның берсен әченә алган туры тирәсендә әйләндерүдән килеп чыккан җисем **шар секторы** дип атала (рәс. 195). Шар секторы шар сегментыннан һәм конустан тора. Әгәр шарның радиусы R, ә шар сегментының биеклеге h ка тигез булса, шар секторының күләме V түбәндәге формула буенча исәпләнә:

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h.$$



Шар секторы
Рәс. 195

Бу формуланы мөстәкыйль рәвештә чыгарыгыз.

84* Сфераның мәйданы

68 нче пунктта без, R радиуслы сфераның мәйданы S ны исәпләү өчен, формуланы исбатлаусыз гына биргән идек:

$$S = 4\pi R^2.$$

Бу формуланы шар күләме формуласыннан файдаланып чыгарырбыз.

Үзәге O ноктасында булган R радиуслы сфераны һәм аны камап торучы n кырлы күпкырлыкны карыйк. Кырларын ирекле бер тәртиптә номерлап, i нче кырның ($i = 1, 2, \dots, n$) мәйданын S_i аша тамгалыйк. Сфераның O үзәген кисемтәләр ярдәмендә күпкырлыкның барлык түбәләре белән тоташтырып, уртак O түбәле n пирамида табарбыз, аларның нигезләре — күпкырлыкның кырлары, ә биеклекләре — күпкырлык кырларының сфера белән орыну ноктасына үткәрелгән сфера радиуслары. Шулай булгач, i нче пирамиданың күләме $\frac{1}{3}S_iR$ га тигез, ә камаучы күпкырлыкның тулаем күләме V_n:

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3} S_i R = \frac{1}{3} R \sum_{i=1}^{n} S_i = \frac{1}{3} R P_n,$$

биредә $P_n = \sum_{i=1}^{n} S_i$ — күпкырлыкның өслек мәйданы.

Моннан табабыз:

$$P_n = \frac{3V_n}{R}. \qquad (2)$$

Хәзер камаучы күпкырлыкның һәр кырының иң зур үлчәме нульгә омтылырлык итеп, n ны чикләнмәгән рәвештә зурайтабыз. Бу вакытта камаучы күпкырлыкның күләме V_n шар күләменә омтылыр. Дөрестән дә, камаучы күпкырлыкта һәр кырының иң зур үлчәме δ дан зур булмаса, камаучы күпкырлык үзәге O ноктасында булган $R + \delta$ радиуслы шарда урнашыр. Икенче яктан, камаучы күпкырлык R радиуслы бирелгән шарны үз эченә ала. Шуңа күрә

$$\frac{4}{3}\pi R^3 < V_n < \frac{4}{3}\pi(R + \delta)^3.$$

δ зурлыгы 0 гә омтылганда, $\frac{4}{3}\pi(R + \delta)^3 \to \frac{4}{3}\pi R^3$ булгач, δ 0 гә ($n \to \infty$) омтылганда, $V_n \to \frac{4}{3}\pi R^3$.

(2) тигезлегендә чикләмәгә күчеп табабыз:

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty}\frac{3V_n}{R} = \frac{3}{R}\lim_{n\to\infty} V_n = \frac{3}{R}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^2.$$

Сфера мәйданының билгеләмәсе буенча, $S = \lim_{n\to\infty} P_n$, шулай булгач,

$$S = 4\pi R^2.$$

Сораулар һәм мәсьәләләр

710 R радиуслы шарның күләме V, аның өслек мәйданы S булсын. а) $R = 4$ см булса, S һәм V ны; б) $V = 113{,}04$ см^3 булса, R һәм S ны; в) $S = 64\pi$ см^2 булса, R һәм V ны табыгыз.

711 Айның диаметры Җир диаметрының (якынча) дүрттән бер өлешен тәшкил итә. Ай һәм Җирне шар дип исәпләп, аларның күләмнәрен чагыштырыгыз.

712 Шар һәм цилиндрның күләмнәре тигез, ә шарның диаметры цилиндр нигезенең диаметрына тигез. Цилиндрның биеклеген шар радиусы аша күрсәтегез.

713 Туңдырманың стаканы коник формада, аның тирәнлеге 12 см, өске өлешенең диаметры 5 см. Аңа диаметры 5 см булган ярымшар формасындагы ике кашык туңдырма салалар. Туңдырма эресә, стакан тулырмы?

714 2,5 см диаметрлы цилиндрик мензуркага берникадәр биеклектә су салынган. Аңа 1 см диаметрлы 4 тигез металл шар төшерәләр. Мензуркадагы суның биеклеге күпмегә үзгәрер?

715 Нигез радиусы 5 м, биеклеге 60 см булган шар сегменты формасындагы чәчәклек ясау өчен, ничә кубометр җир кирәк булыр?

716 Ике тигез шар берсенең үзәге икенчесенең өслегендә ятарлык итеп урнашкан. Шарларның уртак кисәге күләменең бер шарның күләменә чагыштырмасын табыгыз.

717 Шар сегментында нигез әйләнәсенең радиусы 60 см га, ә шар радиусы 75 см га тигез. Шар сегментының күләмен табыгыз.

718 Шарның диаметры өч тигез кисәккә бүленеп, бүлү нокталары аша диаметрга перпендикуляр яссылыклар үткәрелгән. Шарның радиусы R га тигез булса, килеп чыккан шар катламының күләмен табыгыз.

719 Шарда диаметрына перпендикуляр булган һәм аны 6 см һәм 12 см лы кисәкләргә бүлүче яссылык үткәрелгән. Шарның килеп чыккан ике кисәгенең күләмнәрен табыгыз.

720 Шар сегментының нигез әйләнәсе радиусы 60 см га, ә шарның радиусы 75 см га тигез булса, шар секторының күләмен табыгыз.

721 Почмагы 30°, радиусы R булган түгәрәк секторы үзен чикләүче радиусларның берсе тирәсендә әйләнә. Килеп чыккан шар секторының күләмен табыгыз.

722 Су Җир өслегенең якынча $\frac{3}{4}$ өлешен каплап тора. Коры җир Җир өслегенең ничә квадрат километрын тәшкил итә? (Җир радиусын 6375 км дип исәпләргә.)

723 10 см радиуслы футбол тубының тышлыгына күпме күн кирәк? (Җөйләр өчен туп өслеге мәйданының 8% ын өстәргә.)

724 Сфераның мәйданы биеклеге сфераның диаметрына, ә нигез диаметры конусның төзүчесенә тигез булган конусның тулы өслеге мәйданына тигез икәнен исбатлагыз.

VII бүлеккә сораулар

1 а) P_1 җисеме P_2 җисемендә урнашса; б) P_1 һәм P_2 җисемнәренең һәркайсы кабыргасы 1 см га тигез булган n кубтан төзелсә, P_1 һәм P_2 җисемнәренең күләмнәре V_1 һәм V_2 нинди бәйләнештә булыр?

2 Бирелгән өчпочмаклы туры призмадан нигезләренең урта сызыклары аша үтүче яссылык белән кистереп алынган өчпочмаклы призманың күләме бирелгән призма күләменең нинди өлешен тәшкил итә?

3 Цилиндрның нигез диаметрын 2 тапкыр зурайтып, биеклеген 4 тапкыр кечерәйтсәк, аның күләме үзгәрерме?

4 Төзек пирамиданың биеклеген n тапкыр зурайтып, нигезенең ягын n тапкыр кечерәйтсәк, аның күләме ничек үзгәрер?

5 Биеклекләре тигез булган ике пирамиданың нигезләре — яклары тиңдәшле рәвештә тигез булган дүртпочмаклар. Бу пирамидаларның күләмнәре тигезме?

6 Ике конусның биеклекләре тигез, ә нигез радиусларының чагыштырмасы 2 гә тигез булса, аларның күләмнәре нинди чагыштырмада булыр?

7 Тигезьянлы трапецияне зур нигезе тирәсендә әйләндерүдән килеп чыккан җисем нинди җисемнәрдән тора?

8 Бер конус тигезьянлы булмаган турыпочмаклы өчпочмакны — катетларының берсе тирәсендә, икенче конус икенче катеты тирәсендә әйләндерүдән килеп чыккан. Бу конусларның күләмнәре тигезме?

9 Бер шарның диаметры икенчесенең радиусына тигез. Бу шарларның: а) радиуслары; б) күләмнәре нинди чагыштырмада булыр?

10 2 см радиуслы шарларның күләмнәре суммасы 6 см радиуслы шарның күләменә тигез булсын өчен, андый ничә шар алырга кирәк?

11 Кубны камаучы шарның күләме бу кубка камаулы шар күләменнән ничә тапкыр зуррак?

12 Сфераның радиусын: а) 2 тапкыр кечерәйтсәң; б) 3 тапкыр зурайтсаң, аның өслек мәйданы ничек үзгәрер?

13 Ике шарның күләмнәре чагыштырмасы 8 гә тигез. Аларның өслек мәйданнары нинди чагыштырмада булыр?

14 Ике шарның өслек мәйданнары $m^2 : n^2$ чагыштырмасында булса, аларның күләмнәре нинди чагыштырмада булыр?

Өстәмә мәсьәләләр

725 Турыпочмаклы параллелепипедның пар-пар чиктәш өч кырының мәйданнары S_1, S_2 һәм S_3 кә тигез. Бу параллелепипедның күләмен S_1, S_2, S_3 аша күрсәтегез һәм аны $S_1 = 6$ дм^2, $S_2 = 12$ дм^2, $S_3 = 18$ дм^2 булганда исәпләп чыгарыгыз.

726 Турыпочмаклы параллелепипедта бер түбәдән чыгучы өч кырының диагональләре 7 см, 8 см һәм 9 см га тигез. Параллелепипедның күләмен табыгыз.

727 Турыпочмаклы параллелепипедның ян кабыргасы a га тигез. Төрле нигезләренең ике ягы аша үткәрелгән кисеменең мәйданы — Q га тигез булган квадрат. Параллелепипедның күләмен табыгыз.

728 Туры параллелепипед нигезенең яклары 7 см һәм $3\sqrt{2}$ см га, ә кысынкы почмагы 45° ка тигез. Параллелепипедның кечерәк диагонале нигез яссылыгы белән 45° лы почмак төзи. Параллелепипедның күләмен табыгыз.

729 Туры $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедында BD_1 һәм A_1C диагональләре үзара перпендикуляр һәм 6 см, 8 см га тигез, $AB = 3$ см. Параллелепипедның күләмен табыгыз.

730 Туры призманың нигезендә турыпочмаклы өчпочмак ята, аның биш кабыргасы a га тигез, ә калган дүрт кабыргасы үзара тигез. Призманың күләмен табыгыз.

731 Нигезендә турыпочмаклы өчпочмак яткан туры призманың күләме 3 м^3 га, ә ян кырлары мәйданнарының иң кечкенәсе һәм иң зурысы 3 м^2 һәм $3\sqrt{5}$ м^2 га тигез. Призма кабыргаларының озынлыгын табыгыз.

732 Өчпочмаклы төзек призмада ян кырының диагонале d га тигез һәм икенче ян кыр яссылыгы белән φ почмагы төзи. Призманың күләмен табыгыз.

733 Өчпочмаклы призманың күләме ян кырының мәйданы белән шул кырдан аңа параллель кабыргага кадәр ераклык тапкырчыгышының яртысына тигез икәнен исбатлагыз.

734 Бер яссылыкта ятмаган өч параллель турыда AA_1, BB_1 һәм CC_1 тигез кисемтәләре салынган. Бу кисемтәләр ян кабыргалары булган призманың күләме бирелгән турыда әлеге кисемтәләрнең торышына бәйле түгел икәнен исбатлагыз.

735 Өчпочмаклы авыш призмада ян кырларының мәйданнары 20, 37, 51 саннарына пропорциональ. Ян кабыргасы 0,5 дм га, ә ян өслегенең мәйданы 10,8 дм^2 га тигез. Призманың күләмен табыгыз.

736 Өчпочмаклы төзек пирамиданың ян кыры нигез яссылыгы белән φ почмагы төзи, ә нигезенең бу кырда ятмаган түбәсе аннан m ераклыгында урнашкан. Пирамиданың күләмен табыгыз.

737 Дүртпочмаклы төзек пирамиданың ян кабыргасы нигезе белән φ почмагы төзи, ә бу кабырганың уртасының пирамида нигезеннән ераклыгы m га тигез. Пирамиданың күләмен табыгыз.

738 Өчпочмаклы төзек пирамиданың биеклеге h ка, ә кабыргасы пирамиданың ян кабыргасы булган икекырлы почмагы 2φ гә тигез. Пирамиданың күләмен табыгыз.

739 n-почмаклы төзек пирамиданың түбә янындагы яссы почмагы α га, ә нигезенең ягы a га тигез. Пирамиданың күләмен табыгыз.

740 Пирамиданың нигезендә ике почмагы φ_1 һәм φ_2 гә тигез булган өчпочмак ята. Пирамиданың биеклеге h ка тигез, ә һәр ян кабыргасы нигез яссылыгы белән φ_3 почмагы төзи. Пирамиданың күләмен табыгыз.

741 Биеклеге H ка тигез булган дүртпочмаклы пирамиданың нигезендә параллелограмм ята. Параллелограммның диагональләре α почмагы ясап кисешәләр. Пар-пар тигез булган кабыргалары нигез яссылыгы белән β һәм γ почмаклары төзиләр. Пирамиданың күләмен табыгыз.

742 Пирамиданың нигезе — ягы a га тигез ромб. Пирамиданың ике ян кыры нигез яссылыгына перпендикуляр һәм φ гә тигез җәенке икекырлы почмак төзи. Калган ике ян кыры нигез яссылыгы белән θ га тигез икекырлы почмак төзи. Пирамиданың күләмен табыгыз.

743 Тетраэдрның ике кабыргасы b га, ә калган дүрт кабыргасы a га тигез. b озынлыктагы кабыргаларның: а) уртак ноктасы булса; б) уртак ноктлары булмаса, тетраэдрның күләмен табыгыз.

744 Кисек пирамидада нигезенең тиңдәш яклары $2:5$ кә чагыштырмасында. Бу пирамиданың күләме биеклегенең уртасы аша нигез яссылыкларына параллель үтүче яссылык белән нинди чагыштырмада бүленә?

745 Цилиндрның: а) ян өслеге мәйданы S ка, ә нигез мәйданы Q га тигез; б) күчәр киселеме квадрат, ә биеклеге h ка тигез; в) күчәр киселеме квадрат, ә тулы өслеге мәйданы S ка тигез булса, аның күләмен табыгыз.

746 Ян өслеге мәйданнары тигез булган ике цилиндрның күләмнәре чагыштырмасы радиуслары чагыштырмасына тигез икәнен исбатлагыз.

747 Коник бакның тирәнлеге 3 м, ә аның өске түгәрәгенең радиусы 1,5 м га тигез. Ул ничә литр сыеклык сыйдыра?

Күпкырлыклар, цилиндр, конус һәм шар белән төрле мәсьәләләр

748 Конуска нигезе турыпочмаклык булган пирамида камалган. Турыпочмаклыкның кечерәк ягы a га, ә диагональләре арасындагы кечерәк почмагы φ_1 гә тигез. Нигезенең кечерәк ягын эченә алган ян кыры нигез яссылыгы белән φ_2 почмагы төзи. Конусның күләмен табыгыз.

749 Пирамиданың нигезендә ягы a га, кысынкы почмагы φ гә тигез булган ромб ята. Пирамидага конус камалган, аның төзүчесе нигез яссылыгы белән θ почмагы төзи. Конусның күләмен табыгыз.

750 Цилиндрга шар камалган. Цилиндр һәм шарның күләмнәре чагыштырмасын табыгыз.

751 Конус нигезенең радиусы 6 дм га тигез, ә конуска камалган сфераның радиусы 3 дм. Конусның күләмен табыгыз.

752 Нигезенең радиусы r га, төзүчесе l га тигез булган конуска сфера камалган. Конусның ян өслегенә сфераның орыну сызыгы озынлыгын табыгыз.

753 Нигез радиуслары r һәм r_1 гә тигез булган кисек конуска шар камалган. Кисек конус һәм шарның күләмнәре чагыштырмасын табыгыз.

754 Нигез янындагы икекырлы почмагы α га тигез булган өчпочмаклы төзек пирамидага шар камалган. Шарның күләме V га тигез. Пирамиданың күләмен табыгыз.

755 Нигезе ягы a га, почмагы α га тигез ромб булган пирамидага шар камалган. Пирамиданың һәр ян кыры нигезе белән β почмагы төзесә, шарның күләмен табыгыз.

756 R радиуслы сферага күчәр кисеменең диагонале нигезе белән α почмагы төзүче цилиндр камалган. Цилиндрның күләмен табыгыз.

757 Шарга күчәр кисеменең диагональләре арасындагы почмагы α га тигез булган цилиндр камалган. Цилиндрның төзүчесе l га тигез. Шарның күләмен табыгыз.

758 Шарга нигез радиусы r га, биеклеге H ка тигез булган конус камалган. Шарның өслек мәйданын һәм күләмен табыгыз.

759 Шарга пирамида камалган. Пирамиданың нигезендә гипотенузасы 2 см га тигез булган турыпочмаклы өчпочмак ята. Пирамиданың һәр ян кабыргасы нигезе белән α почмагы төзесә, шарның өслек мәйданын һәм күләмен табыгыз.

760 Шарга пирамида камалган, аның нигезе — диагонале 10 см булган турыпочмаклык. Пирамиданың һәр ян кабыргасы нигезе белән β почмагы төзи. Шар өслегенең мәйданын һәм күләмен табыгыз.

761 Цистерна нигезләренә тигез шар сегментлары тоташтырылган цилиндр формасында. Цилиндрның радиусы 1,5 м га, ә сегментның биеклеге 0,5 м га тигез. Цистернаның сыешлыгы 50 $м^3$ булсын өчен, цилиндрның төзүчесе нинди озынлыкта булырга тиеш?

762 Куб, шар, цилиндр һәм конусның (соңгы ике җисемнең нигез диаметрлары биеклекләренә тигез) өслек мәйданнары тигез. Бу җисемнәрнең кайсысы — иң зур күләмгә, кайсысы иң кечкенә күләмгә ия?

763 Диаметры 10 см га тигез, ә стенасының калынлыгы а) 2 мм; б) 1,5 мм булган куыш бакыр шар суда йөзәрме? (Бакырның тыгызлыгы 8,9 $г/см^3$.)

Кабатлау өчен мәсьәләләр

764 Төзек өчпочмаклы $ABCA_1B_1C_1$ призмасында нигезенең ягы 6 см га тигез, ә ян кабыргасы 3 см га тигез.

а) Призманың ABC_1 яссылыгы белән кисем мәйданын табыгыз.

б) A_1B_1 турысының AC_1B яссылыгына параллель булуын исбатлагыз.
в) B_1C турысының ABC яссылыгы белән төзелгән почмакны табыгыз.
г) AB_1C һәм ABC яссылыклары арасындагы почмакны табыгыз.
д) $\overrightarrow{BB_1} - \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{A_1A} - \overrightarrow{C_1C}$ векторларының озынлыгын табыгыз.
е) Призманың күләмен табыгыз.

765 Төзек дүртпочмаклы $MABCD$ пирамидасында нигезенең AB ягы $6\sqrt{3}$ см га тигез, ә ян кабыргасы MA 12 см га тигез. Табыгыз:
а) пирамиданың ян өслеге мәйданын;
б) пирамиданың күләмен;
в) ян кырның нигез яссылыгына авышу почмагын;
г) ян кабырга белән нигез яссылыгы арасындагы почмакны;
д) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})\overrightarrow{AM}$ векторларының скаляр тапкырчыгышын;
е) пирамиданы камаучы сфераның мәйданын.

766 Төзек өчпочмаклы $DABC$ пирамидасында DO биеклеге 3 см га тигез, ә ян DA кабыргасы 5 см га тигез. Табыгыз:
а) пирамиданың тулы өслегенең мәйданын;
б) пирамиданың күләмен;
в) ян кабырга белән нигез яссылыгы арасындагы почмакны;
г) ян кырның нигез яссылыгына авышу почмагын;
д) $\frac{1}{2}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})\overrightarrow{MA}$ векторларының скаляр тапкырчыгышын, биредә M — BC кабыргасының уртасы;
е) пирамидага камалган шарның радиусын.

767 Төзек дүртпочмаклы $MABCD$ пирамидасында 8 см га тигез булган ян кабыргасы MA нигез яссылыгына 60° лы почмак белән авышкан. Табыгыз:
а) пирамиданың ян өслеге мәйданын;
б) пирамиданың күләмен;
в) капма-каршы ян кырлары арасындагы почмакны;
г) ян кыры һәм нигез яссылыгы арасындагы почмакны;
д) $\frac{1}{2}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD})\overrightarrow{MK}$ векторларының скаляр тапкырчыгышын, биредә K — AB кабыргасының уртасы;
е) пирамиданы камаган шарның радиусын.

Катлаулырак мәсьәләләр

768 $MABC$ пирамидасы нигезендә ABC өчпочмагы ята, анда $\angle C = 180°$, $AC = 4$ см, $BC = 3$ см. MAC кыры нигез яссылыгына перпендикуляр, ә башка ике ян кыры нигез яссылыгы белән тигез почмаклар төзиләр. Пирамиданың MH биеклеге нигезеннән MBC кырына кадәрге ераклык $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ см га тигез. Пирамиданың ян өслеге мәйданын табыгыз.

769 Тетраэдр биеклекләренең берсе каршы яткан кырының биеклекләре кисешү ноктасы аша үтсә, бу тетраэдрның калган биеклекләре

дә каршы яткан кырларының биеклекләре кисешү нокталары аша үткәнен исбатлагыз.

770 *OABC* тетраэдрының *O* түбәсе янындагы барлык яссы почмаклары да 90° ка тигез. *AOB* өчпочмагының мәйданы *ABC* һәм O_1AB (биредә O_1 — *O* ноктасының *ABC* яссылыгына проекциясе) өчпочмаклары мәйданнарының геометрик уртасына тигез икәнен исбатлагыз.

771 Тетраэдрның кабыргасы аша бу кабырга янындагы икекырлы почмакны урталай бүлүче яссылык үткәрелгән. Бу яссылыкның тетраэдрның капма-каршы ягын икекырлы почмак эченә кергән кырлар мәйданнарының чагыштырмасына тигез булган чагыштырмада бүлүен исбатлагыз.

772 Бер яссылыкта ятмаган бирелгән дүрт ноктадан һәркайсы тигез ераклыкта булган ничә яссылык бар?

773 Икекырлы почмакның ике кырын кисүче турының кисешү нокталары аның кабыргасыннан тигез ераклыкта булганда һәм бары тик шул вакытта гына кырлар белән тигез почмаклар төзегәнен исбатлагыз.

774 Кубның киселме төзек өчпочмак, квадрат, төзек алтыпочмак булуы мөмкин, ләкин төзек бишпочмак һәм яклар саны алтыдан артыграк булган төзек күппочмак була алмавын исбатлагыз.

775 Кубның түбәләреннән аның үзәге аша үтүче турыга кадәр ераклыкларының квадратлары суммасы бу турының торышына бәйле түгел икәнен исбатлагыз.

776 Кубны алты тигез тетраэдрга бүлегез.

777 Бүлмә куб формасында. Кабырганың уртасында утырган үрмәкүч, иң кыска юл белән хәрәкәт итеп, кубның иң ерак түбәләренең берсендә утырган чебенне тотып алырга тели. Үрмәкүч ничек хәрәкәт итәргә тиеш?

778 Үзе зурлыгындагы яки хәтта аннан да зуррак куб үтәрлек итеп, кубта үтәли тишем тишәргә мөмкин икәнен исбатлагыз.

779 Алтыпочмаклы төзек пирамидада ян кырының мәйданы *S* ка тигез. Пирамида биеклегенең уртасы аша ян кырына параллель итеп үткәрелгән яссылыкның пирамида белән киселменең мәйданын табыгыз.

780 Ягы 1 см га тигез куб формасындагы тартмага урнашкан төзек тетраэдр кабыргасының иң зур озынлыгы нинди булырга мөмкин?

781 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы бирелгән. AB_1CD_1 һәм C_1BA_1D тетраэдрлары кисешкәндә, төзек октаэдр килеп чыкканын исбатлагыз.

782 Чикле сандагы төрле куб парларыннан турыпочмаклы параллелепипед төзеп булмавын исбатлагыз.

783 Кабыргасы 1 см булган куб эчендә сынык сызык урнашкан, шуның белән бергә, кубның теләсә кайсы кырына теләсә нинди параллель яссылык аны бердән дә артык булмаган ноктада кисә. Сынык сызыкның озынлыгы 3 см дан кечерәк икәнен исбатлагыз. Озынлыгы 3 см дан теләсә никадәр аз аерыла торган, күрсәтелгән үзлеккә ия сынык сызык төзергә мөмкин икәнен исбатлагыз.

784 *AB* һәм *CD* кисемтәләре чалышма турылар буенча күчеп хәрәкәт итәләр. Бу вакытта *ABCD* тетраэдрының күләме үзгәрмәвен исбатлагыз.

785 Төзек додекаэдр кырларының үзәкләре төзек икосаэдр түбәләре икәнен исбатлагыз.

786 Төзек икосаэдр кырларының үзәкләре төзек додекаэдр түбәләре икәнен исбатлагыз.

787 Төзек *ABC* өчпочмагының ягы a га тигез. a озынлыктагы *AS* кисемтәсе *ABC* яссылыгына перпендикуляр. *AB* һәм *SC* турылары арасындагы ераклыкны һәм почмакны табыгыз.

788 Төзек *ABC* өчпочмагының ягы a га тигез. *ABC* яссылыгына перпендикуляр бердәй юнәлешле *BD* һәм *CE* нурларында, $BD = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $CE = a\sqrt{2}$ булырлык итеп, *D* һәм *E* нокталары алынган. *ADE* өчпочмагы турыпочмаклы икәнен исбатлагыз һәм *ABC* белән *ADE* яссылыклары арасындагы почмакны табыгыз.

789 Векторлардан файдаланып, параллелепипедның дүрт диагоналенең квадратлары суммасы аның унике кабыргасының квадратлары суммасына тигез икәнен исбатлагыз.

790 *OABC* тетраэдрының *ABC* нигезе үтә күренмәле, ә барлык калган кырлары көзгеле. *O* түбәсе янындагы барлык яссы почмаклары туры. Тетраэдрга *ABC* нигезе аша аңа теләсә нинди почмак ясап кергән яктылык нуры, аның кырларыннан кайтарылып, керүче нурга карата капма-каршы юнәлештә чыкканын исбатлагыз. (Атап әйткәндә, лазер ярдәмендә Айга кадәр ераклыкны үлчәү өчен, иярченгә урнаштырылган почмакча үлчәгечнең төзелеше шушы үзлеккә нигезләнгән.)

791 *A* ноктасыннан *AB*, *AC*, *AD* һәм *AE* нурлары чыга, һәм $\angle BAC = 60°$, $\angle BAD = \angle DAC = 45°$, ә *AE* нуры *ABD* яссылыгына перпендикуляр. *CAE* почмагын табыгыз.

792 Тетраэдрның биеклекләре аның капма-каршы кабыргалары перпендикуляр булганда һәм бары тик шул вакытта гына бер ноктада кисешкәнен исбатлагыз.

793 Тетраэдрның өч ян кабыргасы бер-берсенә тигез. Бу кабыргалар белән тигез почмаклар төзүче туры нигез яссылыгына перпендикуляр икәнен исбатлагыз.

794 *OABC* тетраэдрының *O* түбәсе янындагы барлык яссы почмаклары туры. *O* түбәсенең *ABC* яссылыгына проекциясе *ABC* өчпочмагы биеклекләренең кисешү ноктасы икәнен исбатлагыз.

795 Сфера ноктасыннан өч пар-пар перпендикуляр хорда үткәрелгән. Аларның квадратлары суммасы бу хордаларның торышына бәйле түгел икәнен исбатлагыз.

796 Шарны кисеп узмаучы бирелгән туры аша үткән барлык яссылыкларның шар белән кисемнәренең үзәкләре күплеген табыгыз.

797 Бирелгән сферага пар-пар перпендикуляр өч орынма туры үткәрергә мөмкин булган барлык нокталар күплеген табыгыз.

798 Биеклекләре h_1, h_2, h_3, h_4 булган тетраэдрга R радиуслы шар камалган. $\frac{1}{R}=\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}$ икәнен исбатлагыз.

799 Пар-пар бер-берсенә орынучы өч шарга уртак орынма яссылык үткәрергә мөмкин булсын өчен, аларның радиуслары нинди шартны канәгатьләндерергә тиеш?

800 Яссылыкта R радиуслы дүрт шар ята, шуның белән бергә, аларның өчесе пар-пар бер-берсенә орына, ә дүртенчесе аларның икесенә орына. Бу шарлар өстенә бер-берсенә орынучы r радиуслы кечерәк ике шар куелган, шул ук вакытта аларның һәркайсы өч зур шарга орына. Кечкенә шарларның радиусын табыгыз.

801 Яссылыкта R радиуслы бер-берсенә пар-пар орынучы өч шар ята. Конусның нигезе әлеге яссылыкта ята, ә бирелгән шарлар аңа тышкы яктан орыналар. Конусның биеклеге λR га тигез. Аның нигез радиусын табыгыз.

802 AB_1C_1 һәм A_1BC яссылыклары өчпочмаклы төзек $ABCA_1B_1C_1$ призмасын дүрт кисәккә бүлә. Бу кисәкләрнең күләмнәре чагыштырмасын табыгыз.

803 Тетраэдрның күләме $\frac{1}{6}abc\sin\varphi$ гә тигез икәнен исбатлагыз, биредә a һәм b — капма-каршы кабыргалар, ә φ һәм c — тиңдәшле рәвештә алар арасындагы почмак һәм ераклык.

804 Тетраэдрның кабыргасы һәм каршы яткан кабыргасының уртасы аша үтүче яссылык аны күләмнәре тигез булган ике кисәккә бүлгәнен исбатлагыз.

805 $ABCD$ параллелограммы — $OABCD$ пирамидасының нигезе. AB турысы һәм OCD кырының урта сызыгы аша үтүче яссылык пирамиданың күләмен нинди чагыштырмада бүлә?

806 Бер яссылыкта ятмаган өч параллель туры бирелгән. Аларның берсендә — AB кисемтәсе, ә калган икесендә тиңдәшле рәвештә C һәм D нокталары алынган. $ABCD$ тетраэдрының күләме C һәм D нокталарын ничек алуга бәйле түгел икәнен исбатлагыз.

807 E һәм F нокталары — $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында DC һәм BB_1 кабыргаларының урталары. Кубның кабыргасы 1 см га тигез. AD_1EF тетраэдрының күләмен табыгыз.

808 Ике параллель яссылыкта ике күппочмак алынган. Аларның түбәләре, килеп чыккан күпкырлыкның барлык кырлары, трапецияләр, өчпочмаклар һәм параллелограммнар булырлык итеп, кисемтәләр белән тоташтырылган.

$$V=\frac{h}{6}(S_1+S_2+4S_3)$$

икәнен исбатлагыз, биредә V — күпкырлыкның күләме, h — аның биеклеге, S_1 һәм S_2 — нигез мәйданнары, S_3 — нигез яссылыкларына параллель һәм алардан тигез ераклыкта урнашкан яссылык белән кисем мәйданы.

809 Биеклекләре диаметрларыннан зуррак булган ике тигез цилиндр күчәрләре туры почмак ясап кисешерлек һәм күчәрләренең кисешү ноктасы цилиндрларның нигезләреннән тигез ераклыкта булырлык итеп урнашкан. Һәр цилиндрның радиусы 1 см га тигез булса, аларның уртак кисәгенең күләмен табыгыз.

810 Бирелгән шарны күчәр кисеменең түбә янындагы почмагы α булган конус камый. α ның нинди кыйммәте өчен конус иң кечкенә күләмгә ия?

811 Конуска шар камалган. Конус белән шарның күләмнәре чагыштырмасы конусның тулы өслеге белән шарны чикләүче сфера өслеге мәйданнары чагыштырмасына тигез икәнен исбатлагыз.

812 Нигезенең ягы a га, ә түбә янындагы яссы почмагы α га тигез булган дүртпочмаклы төзек пирамида аның түбәсе аша нигезенең ягына параллель үтүче туры тирәсендә әйләнә. Килеп чыккан әйләнү җисеменең күләмен табыгыз.

813 Шар ярымтүгәрәкне аның диаметрын эченә алган туры тирәсендә әйләндереп табыла. Бу вакытта бер очы бирелгән диаметрның очы белән тәңгәл килгән ниндидер хорданы әйләндерү юлы белән төзелгән өслек шарны күләмнәре тигез булган ике кисәккә бүлә. Бу хорда белән диаметр арасындагы почмакның косинусын табыгыз.

814 Тетраэдрның барлык биеклекләре H ноктасында кисешәләр. H ноктасы, камаучы сфераның үзәге O, тетраэдрның түбәләрен каршы яткан кырлары медианаларының кисешү нокталары белән тоташтыручы кисемтәләрнең кисешү ноктасы G бер турыда ятканын (Эйлер теоремасы), өстәвенә O һәм H нокталары G ноктасына карата симметрик икәнен исбатлагыз.

815 Барлык биеклекләре бер ноктада кисешә торган тетраэдр бирелгән. Барлык кырлары медианаларының кисешү нокталары, тетраэдр биеклекләренең нигезләре һәм биеклекләренең кисешү ноктасын түбәләре белән тоташтыручы кисемтәләрнең һәркайсын, түбәдән исәпләгәндә, $2:1$ чагыштырмасында бүлүче нокталар үзәге Эйлер турысында урнашкан бер сферада ятканын исбатлагыз (Эйлер сферасы).

VIII бүлек
Планиметриядән кайбер мәгълүматлар

§ 1 Әйләнмә белән бәйле почмаклар һәм кисемтәләр

85 Орынма һәм хорда арасындагы почмак

Камаулы почмакның үзе таянган дуганың яртысы белән үлчәнгәнен без беләбез инде. Орынма һәм хорда арасындагы почмак турындагы теореманы исбатлыйк.

Теорема

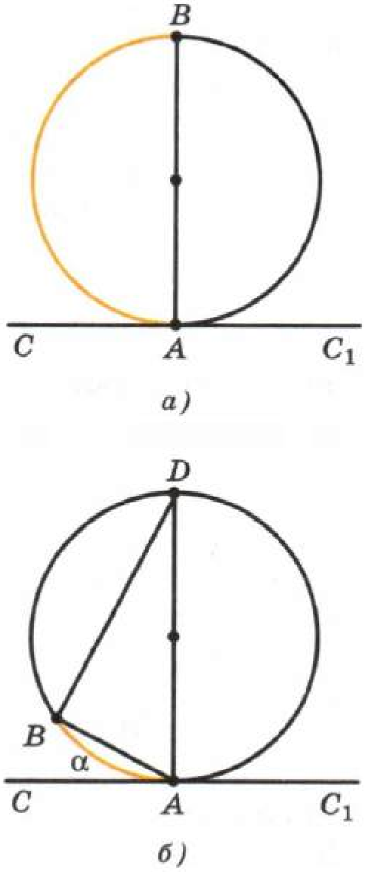
Орынма һәм орыну ноктасы аша үтүче хорда арасындагы почмак үз эченә алынган дуганың яртысы белән үлчәнә.

Исбатлау

AB— бирелгән хорда, CC_1 — A ноктасы аша үтүче орынма, ди. AB диаметр булса (рәс. 196, *а*), BAC почмагы (һәм шулай ук BAC_1 почмагы) эченә алынган дуга ярымәйләнә була. Икенче яктан, бу очракта BAC һәм BAC_1 почмаклары — туры почмаклар, шуңа күрә теореманың раславы дөрес.

Ә хәзер AB хордасы диаметр булмасын. Төгәллек өчен орынмада C һәм C_1 нокталары CAB почмагы кысынкы булырлык итеп сайлап алынган дип исәплик һәм α хәрефе белән аның эчендәге дуга зурлыгын тамгалыйк (рәс. 196, *б*). AD диаметрын үткәрик һәм ABD өчпочмагының турыпочмаклы икәнен күрәбез, шуңа күрә $\angle ADB = 90° - \angle DAB = \angle BAC$. ADB почмагы камаулы булганлыктан, $\angle ADB = \frac{\alpha}{2}$, димәк, шулай ук $\angle BAC = \frac{\alpha}{2}$ була. Шулай итеп, AC орынмасы һәм AB хордасы арасындагы BAC почмагы аның эчендәге дуганың яртысы белән үлчәнә.

Мондый раслау BAC_1 почмагы өчен дә дөрес. Дөрестән дә, BAC һәм BAC_1 почмаклары чиктәш, шуңа күрә $\angle BAC_1 = 180° - \frac{\alpha}{2} = \frac{360° - \alpha}{2}$. Икенче яктан, $(360° - \alpha)$ — BAC_1 почмагы эчендәге ADB дугасының зурлыгы. Теорема исбатланды.



Рәс. 196

86 Әйләнә белән бәйле кисемтәләр турында ике теорема

Камаулы почмаклар турындагы теоремадан бер үк дугага таянучы почмаклар тигез икәнлеге чыга. Бу күзәтүне **кисешүче хордалар кисемтәләре турында теореманы** исбатлау өчен файдаланыйк.

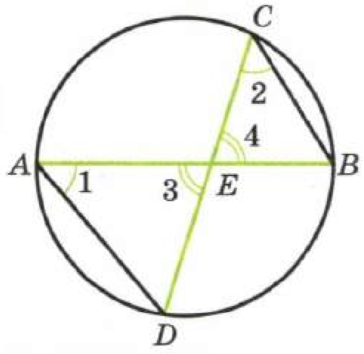
1 нче теорема

Ике кисешүче хорданың берсенең кисемтәләре тапкырчыгышы икенче хорданың кисемтәләре тапкырчыгышына тигез.

Исбатлау

AB һәм CD хордалары E ноктасында кисешсеннәр, ди (рәс. 197). $AE \cdot BE = CE \cdot DE$.

ADE һәм CBE өчпочмаклары өчпочмаклар охшашлыгының беренче билгесе буенча охшаш: $\angle 1 = \angle 2$, бу почмаклар бер үк BD дугасына таянганлыктан, 3 һәм 4 почмаклары вертикаль почмаклар буларак тигез. Димәк, $\frac{AE}{CE} = \frac{DE}{BE}$, яки $AE \cdot BE = CE \cdot DE$. Теорема исбатланды.



Рәс. 197

Орынма һәм хорда арасындагы почмак турындагы теоремадан мөһим нәтиҗә — орынма квадраты турындагы теорема чыга.

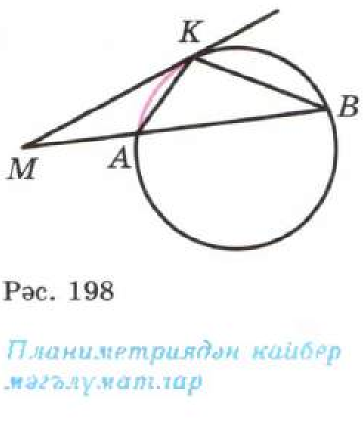
2 нче теорема

***M* ноктасы аша әйләнәне *A* һәм *B* нокталарында кисеп үтүче кисүче һәм *MK* орынмасы (*K* — орыну ноктасы) үткәрелгән булса, $MA \cdot MB = MK^2$ була.**

Кыскача бу теореманы болай әйтәләр: **кисүче белән аның тышкы өлешенең тапкырчыгышы орынманың квадратына тигез.**

Исбатлау

AK һәм BK кисемтәләре үткәрик (рәс. 198). AKM һәм KBM өчпочмаклары охшаш: аларның M почмагы уртак, ә AKM һәм B почмаклары тигез, чөнки аларның һәрберсе AK дугасының яртысы белән үлчәнә. Димәк, $\frac{MK}{MA} = \frac{MB}{MK}$, яки $MA \cdot MB = MK^2$. Теорема исбатланды.



Рәс. 198

Искәрмә

Исбатланган теоремадан, әгәр M ноктасы әйләнә тышында ятса һәм аның аша әйләнәне A һәм B нокталарында кисеп үтүче кисүче үткәрелгән булса, $MA \cdot MB$ тапкырчыгышы кисүченең торышына бәйле

түгел, бу тапкырчыгыш M ноктасыннан үткәрелгән орынманың квадратына тигез. Икенче яктан, MK орынмасының квадраты $OM^2 - R^2$ ка тигез, биредә O — әйләнә үзәге, R — аның радиусы (рәс. 199, *а*). Шулай итеп,

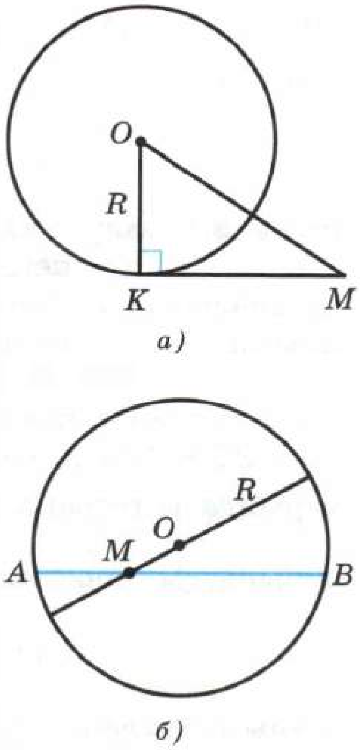
$$MA \cdot MB = OM^2 - R^2. \qquad (1)$$

Хәзер әйләнә эчендә яткан M ноктасын тикшерик. Аның аша нинди дә булса AB хордасын үткәрик (рәс. 199, *б*). 1 нче теоремада $MA \cdot MB$ тапкырчыгышы хорданың торышына бәйле түгел, ул M ноктасы аша үтүче диаметр кисемтәләренең тапкырчыгышына тигез, ягъни $(R + OM) \cdot (R - OM) = R^2 - OM^2$. Шулай итеп, бу очракта

$$MA \cdot MB = R^2 - OM^2. \qquad (2)$$

(1) һәм (2) формулалары бер-берсенә охшаш. Векторларның скаляр тапкырчыгышыннан файдалансак, аларны хәтта бер формулага берләштерергә була:

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = OM^2 - R^2.$$



Рәс. 199

87 Түбәләре әйләнәнең эчендә һәм тышында булган почмаклар

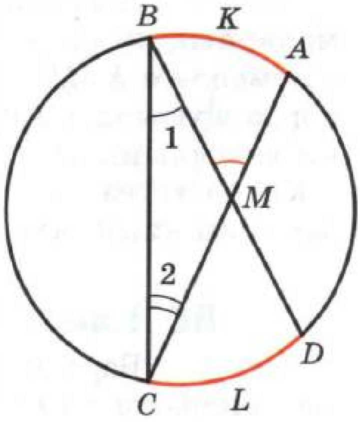
Камаулы почмак турында һәм орынма белән хорда арасындагы почмак турындагы теоремалар түбәләре әйләнә эчендә һәм тышында булган почмакларны алар эчендәге дугалар аша белдерергә мөмкинлек бирәләр. Шундый почмакларга мисаллар карыйк.

Ике кисешүче хордалар арасындагы почмак алар эченә алынган дугаларның ярымсуммасы белән үлчәнә.

M ноктасында кисешүче AC һәм BD хордаларын тикшерик һәм BC хордасын үткәрик (рәс. 200). $\angle AMB$ BMC өчпочмагының тышкы почмагы булганлыктан, $\angle AMB = \angle 1 + \angle 2$. Камаулы почмак турындагы теоремадан $\angle 1 = \frac{1}{2} \cup CLD$, $\angle 2 = \frac{1}{2} \cup AKB$, шуңа күрә

$$\angle AMB = \frac{1}{2}(\cup CLD + \cup AKB),$$

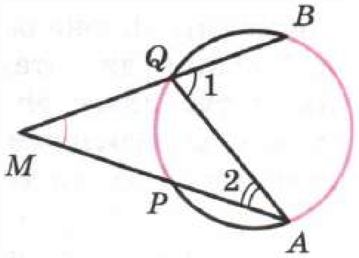
шуны исбатларга кирәк иде дә.



Рәс. 200

Бер ноктадан үткәрелгән ике кисүче арасындагы почмак аның эченә алынган дугаларның ярымаермасы белән үлчәнә.

201 нче рәсемне карыйк. 1 почмагы — AMQ почмагының тышкы почмагы, шуңа күрә



Рәс. 201

$\angle 1 = \angle 2 + \angle AMB$. 1 һәм 2 почмаклары камаулы булганлыктан, $\angle 1 = \frac{1}{2} \cup AB$, $\angle 2 = \frac{1}{2} \cup PQ$. Димәк,

$$\angle AMB = \frac{1}{2} (\cup AB - \cup PQ),$$

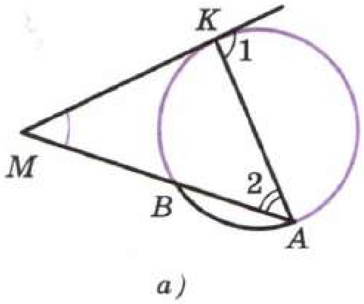
шуны исбатларга кирәк иде дә.

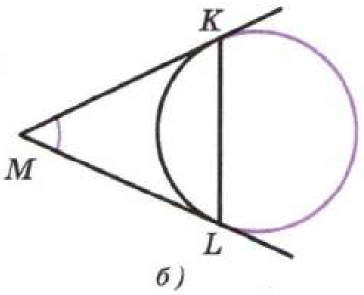
Бер ноктадан үткәрелгән орынма һәм кисүче арасындагы почмак үз эченә алынган дугаларның ярымаермасы белән үлчәнә.

202, *а* рәсемен карыйк. 1 почмагы AMK почмагының тышкы почмагы булып тора, шуңа күрә $\angle 1 = \angle 2 + \angle AMK$. Орынма һәм хорда арасындагы почмак турындагы теоремадан $\angle 1 = \frac{1}{2} \cup AK$, ә камалган почмак турындагы теоремадан $\angle 2 = \frac{1}{2} \cup BK$ икәне чыга. Димәк,

$$\angle AMK = \frac{1}{2} (\cup AK - \cup BK),$$

шуны исбатларга кирәк иде дә.





Рәс. 202

Бер ноктадан үткәрелгән ике орынма арасындагы почмак аның эченә алынган ярымәйләнәдән кечерәк дуга зурлыгын 180° тан алганга тигез.

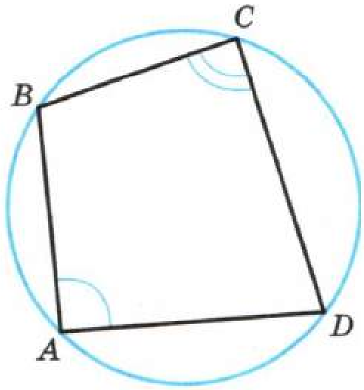
Дөрестән дә, бер ноктадан үткәрелгән орынмаларның кисемтәләре тигез булганлыктан, 202, *б* рәсемендәге KML өчпочмагы тигезьянлы. Орынма һәм хорда арасындагы почмак турындагы теоремадан аның нигезе янындагы K һәм L почмакларының суммасы $\cup KL$ на тигез. Димәк, $\angle KML = 180° - \cup KL$, шуны исбатларга кирәк иде дә.

88 Камаулы дүртпочмак

Барлык түбәләре дә әйләнәдә яткан күппочмак әйләнәгә камалган, ә әйләнә үзе бу күппочмакны камаучы дип аталганын искә төшерик.

Өчпочмактан аермалы дүртпочмакны һәрвакытта да әйләнә белән камап булмый. Әгәр дә дүртпочмакны әйләнә белән камап булса, андый дүртпочмак кабарынкы дип атала (моны исбатлагыз), аның почмаклары түбәндәге әһәмиятле үзлеккә ия: **теләсә нинди камаулы дүртпочмакта капма-каршы почмакларның суммасы 180° ка тигез.**

Бу үзлекне 203 нче рәсемен карап һәм камаулы почмак турындагы теоремадан файдаланып исбатларга җиңел. Дөрестән дә,



Рәс. 203

$$\angle A = \frac{1}{2} \cup BCD, \ \angle C = \frac{1}{2} \cup BAD,$$

шуңа күрә

$$\angle A + \angle C = \frac{1}{2} (\cup BCD + \cup BAD) = \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°.$$

Икенче төрле раслау да дөрес (**камаулы дүртпочмак билгесе): дүртпочмакның капма-каршы почмакларының суммасы 180° ка тигез булса, аны әйләнә белән камарга була.**

Кабарынкы *ABCD* дүртпочмагын тикшерик, анда $\angle A + \angle C = 180°$, һәм *C* түбәсе *A*, *B* һәм *D* нокталары аша үтүче әйләнәдә ятуын исбатлыйк (203 нче рәс. кара).

Болай түгел дип уйлыйк. Ул вакытта *CB* һәм *CD* турылары күрсәтелгән әйләнәгә я орынма булалар (рәс. 204, *а*), я аларның берсе булса да, мәсәлән *CB* турысы, бу әйләнәгә карата кисүче була (рәс. 204, *б*, *в*). Бу очракларны аерым карыйк.

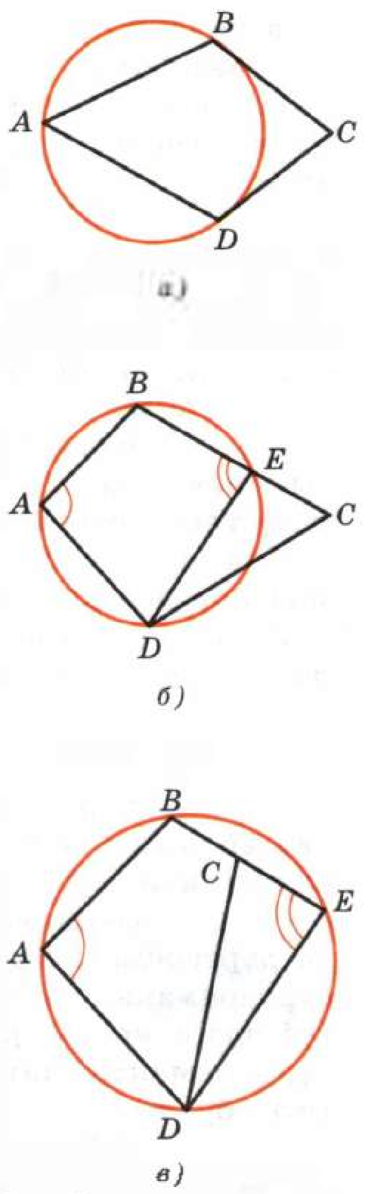
CB һәм *CD* турылары орынма булсалар, $\angle C = 180° - \cup BD$ (87 нче п. ны кара), шуңа күрә

$$\angle A + \angle C = \frac{1}{2} \cup BD + 180° - \cup BD = 180° - \frac{1}{2} \cup BD < 180°,$$

ә бу шартка каршы килә.

CB турысы кисүче булса, ул әйләнәне тагын бер *E* ноктасында кисеп үтә (204, *б*, *в* рәс. кара). *ABED* дүртпочмагы камаулы булганлыктан, $\angle A + \angle E = 180°$. Ләкин $\angle E \neq \angle C$, чөнки бу почмакларның берсе — *DCE* өчпочмагының почмагы, ә икенчесе бу өчпочмакның тышкы почмагы була. Димәк, бу очракта $\angle A + \angle C \neq 180°$, без тагын шартка каршы килдек.

Шулай итеп, *C* түбәсе *A*, *B* һәм *D* нокталары аша үтүче әйләнәдә ята, шуны исбатларга кирәк иде дә.



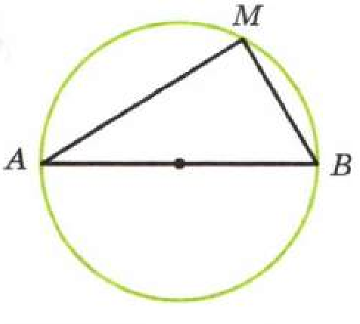
Рәс. 204

Искәрмә

Исбатланган раслаудан *ABCD* дүртпочмагының *A* һәм *C* почмаклары туры булса, аны әйләнә белән камарга була, өстәвенә *AC* диагонале бу әйләнәнең диаметры була (ни өчен икәнен аңлатыгыз). Икенче төрле әйткәндә, *B* һәм *D* нокталары диаметры *AC* булган әйләнәдә ята. Гомумирәк раслау да дөрес: **бирелгән ике нокта *A* һәм *B* дан һәм *AMB* почмагы туры булган барлык *M* нокталарыннан торган күплек диаметры *AB* булган әйләнәдән гыйбарәт.**

Дөрестән дә, диаметры *AB* булган әйләнәнең *A* һәм *B* нокталарыннан аермалы теләсә нинди *M* ноктасы

өчен камаулы AMB почмагы туры почмак булганлыктан (рәс. 205), бу әйләнәнең теләсә нинди ноктасы бирелгән күплекнеке була. M ноктасы тикшерелә торган күплекнеке булса, ул диаметры AB булган әйләнәдә ятуын исбатлыйсы гына калды. Моны исбатлыйк.



Рәс. 205

AMB өчпочмагын камаучы әйләнәне тикшерик (205 нче рәс. кара). Бу әйләнәгә карата камаулы булган AMB почмагы туры, шуңа күрә AB кисемтәсе — аның диаметры. Шулай итеп, M ноктасы диаметры AB булган әйләнәдә ята, шуны исбатларга кирәк иде дә.

Ниндидер геометрик үзлеккә ия булган барлык нокталарның күплеген кайвакыт **нокталарның геометрик урыны** дип аталуын билгеләп үтик. Аерым алганда, болай әйтергә була: AMB почмагы (A һәм B бирелгән нокталар) туры почмак булган M нокталарының геометрик урыны булып A һәм B нокталары алынган AB диаметрлы әйләнә тора.

89 Камаучы дүртпочмак

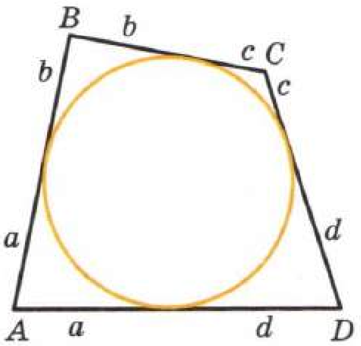
Барлык яклары әйләнәгә орынган күппочмак әйләнәне камаучы дип, ә әйләнә бу күппочмакка камалган дип аталганын искә төшерик.

Өчпочмактан аермалы буларак, теләсә нинди дүртпочмакка да әйләнәне камап булмый. Әгәр дә дүртпочмакка әйләнәне камап булса, аның яклары түбәндәге мөһим үзлеккә ия: **теләсә нинди камаучы дүртпочмакта капма-каршы якларының суммасы тигез була.**

206 нчы рәсемне карыйк, анда бер үк хәрефләр белән орынмаларның тигез кисемтәләре тамгаланган. Түбәндәгене искәртәбез:

$$AB + CD = a + b + c + d, \; BC + AD = a + b + c + d,$$

шуңа күрә $AB + CD = BC + AD$.



Рәс. 206

Кире раслау да дөрес **(камаучы дүртпочмак билгесе): кабарынкы дүртпочмакның капма-каршы якларының суммасы тигез булса, аның эченә әйләнә камарга була.**

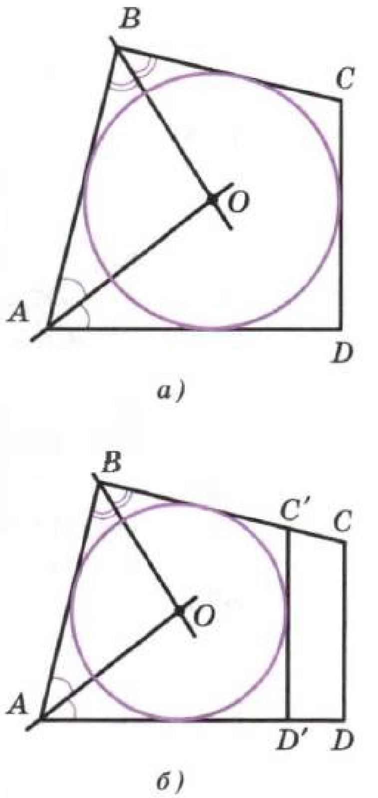
Кабарынкы $ABCD$ дүртпочмагын тикшерик, анда $AB + CD = BC + AD$. A һәм B почмакларының биссектрисалары кисешкән O ноктасы AB, AD һәм BC якларыннан тигез ераклашкан, шуңа күрә күрсәтелгән өч якка орынучы O үзәкле әйләнә үткәрергә мөмкин

(рәс. 207, *а*). Бу әйләнә шулай ук CD ягына орынуын һәм, димәк, $ABCD$ дүртпочмагына камаучы булуын исбатлыйк.

Бу болай түгел дип фаразлыйк. Ул вакытта CD турысының әйләнә белән уртак ноктасы булмый, я ул кисүче була. Беренче очракны тикшерик (рәс. 207, *б*). CD турысына параллель булган $C'D'$ орынмасы үткәрик (C' һәм D' — орынманың BC һәм AD яклары белән кисешү нокталары). $ABC'D'$ камаучы дүртпочмак булганлыктан, $AB + C'D' = BC' + AD'$, яки

$$AB + C'D' = BC - C'C + AD - D'D.$$

Бу тигезлекнең уң ягында $BC + AD$ суммасын $AB + CD$ суммасына алмаштырып, $C'D' + C'C + D'D = CD$ тигезлеген табабыз, ягъни $C'CDD'$ дүртпочмагында бер як башка өч якның суммасына тигез. Ләкин моның булуы мөмкин түгел, һәм, димәк, безнең фаразыбыз (CD турысының һәм әйләнәнең уртак нокталары булуы мөмкин түгел дигән) дөрес түгел. Шул рәвешле, CD турысының әйләнәгә карата кисүче булуы мөмкин түгеллеге исбатлана. Димәк, әйләнә CD ягына орына, шуны исбатларга кирәк иде дә.



Рәс. 207

Мәсьәләләр

816 O үзәкле әйләнәнең OA радиусында яткан D ноктасы аша OA га перпендикуляр булган BC хордасы, ә B ноктасы аша әйләнәгә OA турысын E ноктасында кисеп үтүче орынма үткәрелгән. BA нуры CBE почмагының биссектрисасы булуын исбатлагыз.

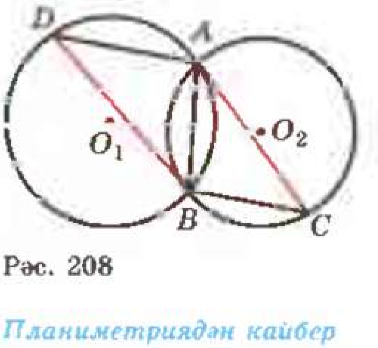
817 Ике әйләнәнең бер уртак ноктасы M бар. Бу нокта аша бер әйләнәне — A һәм A_1 нокталарында, ә икенчесен B һәм B_1 нокталарында кисеп үтүче ике кисүче үткәрелгән. $AA_1 \parallel BB_1$ булуын исбатлагыз.

818 AC турысы — O_1 үзәкле әйләнәгә орынма, ә BD турысы — O_2 үзәкле әйләнәгә орынма (рәс. 208). Исбатлагыз: а) $AD \parallel BC$; б) $AB^2 = AD \cdot BC$; в) $BD^2 : AC^2 = AD : BC$.

819 M ноктасы $ABCD$ дүртпочмагы эчендә ята. ABM һәм MCD өчпочмакларын камаучы әйләнәләрнең M ноктасында уртак орынмасы булганда һәм бары шул вакытта гына $\angle AMD = \angle ABM + \angle MCD$ тигезлеге дөрес була.

820 Әйләнә ABC өчпочмагының AB һәм AC якларына орына һәм BC ягын P һәм Q нокталарында кисеп үтә, $BP = CQ$. ABC өчпочмагының тигезьянлы икәнен исбатлагыз.

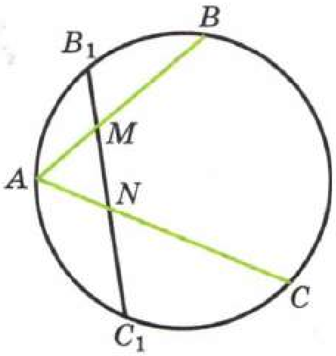
821 Әйләнәдә ятмаган ноктада кисешүче ике турыдан әйләнә тигез хордалар кисеп ала. Бу



Рәс. 208

турыларның кисешү ноктасыннан ике хорданың һәрберсенең очларына кадәрге ераклыкларның үзара тигез булуын исбатлагыз.

822 O үзәкле әйләнәдә яткан K ноктасы аша KA хордасы һәм KB орынмасы үткәрелгән, ә O ноктасы аша OA турысына перпендикуляр булган һәм KA хордасын M ноктасында, ә KB орынмасын N ноктасында кисүче туры үткәрелгән. $NK = NM$ булуын исбатлагыз.



Рәс. 209

823 B_1 һәм C_1 нокталары — AB һәм AC дугаларының урталары (рәс. 209). $AM = AN$ икәнен исбатлагыз.

824 A, B, C һәм D нокталары бер әйләнәдә ята, BD нуры ABC өчпочмагының BM биссектрисасын эченә ала. $\angle AMD = \angle BAD$ икәнен исбатлагыз.

825 AB һәм CB хордалары үзара перпендикуляр, AB нуры — BAE почмагының биссектрисасы, $AE \perp BC$ икәнен исбатлагыз. Барлык мөмкин булган очракларны тикшерегез.

826 AA_1 һәм BB_1 кисемтәләре — ABC өчпочмагының биеклекләре. A, B, A_1 һәм B_1 нокталарының бер әйләнәдә ятуын исбатлагыз.

827 Камаулы дүртпочмакның диагональләре үзара перпендикуляр булсалар, дүртпочмакның капма-каршы якларының квадратлары суммасы камаучы әйләнәнең диаметры квадратына тигез булуын исбатлагыз.

828 Әйләнәгә камалган $ABCD$ өчпочмагында A һәм B почмакларының биссектрисалары CD ягында яткан ноктада кисешәләр. $CD = BC + AD$ икәнен исбатлагыз.

829 Әйләнәгә камалган теләсә нинди дүртпочмакта диагональләренең тапкырчыгышы капма-каршы яклары тапкырчыгышларының суммасына тигез булуын исбатлагыз (Птоломей теоремасы).

830 Күрсәтелгән тәртиптә әйләнәдә дүрт нокта A, B, C һәм D бирелгән. M ноктасы — AB дугасының уртасы, K — AB һәм MD хордаларының кисешү ноктасы, E — AB һәм MC хордаларының кисешү ноктасы. $CDKE$ дүртпочмагын камаучы әйләнә үткәрергә мөмкин булуын исбатлагыз.

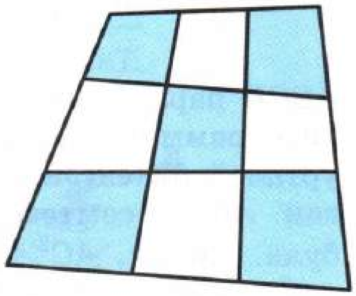
831 Кабарынкы дүртпочмакның капма-каршы яклары кисешкәнгә кадәр дәвам ителгән. Дүртпочмакны камаучы әйләнәне хасил булган почмакларның биссектрисалары үзара перпендикуляр булганда һәм бары шул вакытта гына үткәрергә мөмкин булуын исбатлагыз.

832 Кабарынкы күппочмакка әйләнәне шул вакытта һәм бары шул вакытта гына камарга була, әгәр диагональ белән күппочмак кисешкәндә хасил булган ике өчпочмакка камалган әйләнәләр бу диагональгә бер ноктада орынсалар. Моны исбатлагыз.

833 Әйләнәне камаучы турыпочмаклы трапециянең мәйданы аның нигезләренең тапкырчыгышына тигез булуын исбатлагыз.

834 Нигезләре AB һәм CD булган ($AB > CD$) $ABCD$ трапециясенә әйләнә камалган. $CD = a$, $DK = b$ һәм $AK = d$, K әйләнә белән AD ягының орыну ноктасы булса, трапециянең мәйданын табыгыз.

835 Кабарынкы дүртпочмакның һәр ягында ике нокта билгеләнгән. Бу нокталар, 210 нчы рәсемдә күрсәтелгәнчә, кисемтәләр белән тоташтырылган. Буялган һәр дүртпочмакка әйләнә камарга мөмкин булуы билгеле. Бирелгән дүртпочмакка да әйләнә камарга мөмкин булуын исбатлагыз.



Рәс. 210

§ 2 Өчпочмакларны чишү

90 Медиана турында теорема

Өчпочмакны чишү дип, аны билгеләүче билгеле өч элементы буенча, өчпочмакның калган элементларын табу икәнен искә төшерик. Өчпочмакны чишү өчен, кагыйдә буларак, синуслар һәм косинуслар теоремалары кулланыла. Исбатланышы өчпочмакларны чишүгә нигезләнгән теорема мисалы китерик.

Теорема

***ABC* өчпочмагының *AM* медианасы квадраты $AM^2 = \frac{AB^2}{2} + \frac{AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}$ формуласы аша белдерелә.**

Исбатлау

ABC өчпочмагының якларын белеп, мәсәлән, B почмагының косинусын табарга мөмкин. Моның өчен косинуслар теоремасыннан файдаланырга кирәк (рәс. 211): $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos B$, моннан

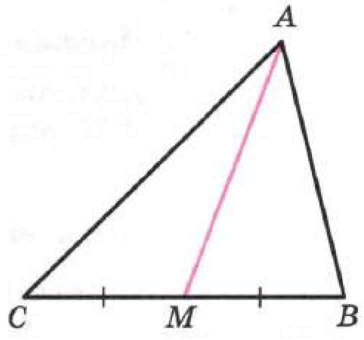
$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC}.$$

Хәзер ABM өчпочмагын тикшерик. $BM = \frac{BC}{2}$ икәнен исәпкә алып, косинуслар теоремасыннан табабыз:

$$AM^2 = AB^2 + \frac{BC^2}{4} - 2AB \cdot \frac{BC}{2} \cdot \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} =$$

$$= \frac{AB^2}{2} + \frac{AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}.$$

Теорема исбатланды.

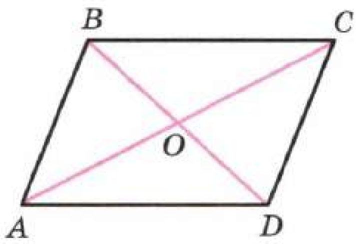


Рәс. 211

Нәтиҗә

Параллелограмм диагональләренең квадратлары суммасы аның яклары квадратлары суммасына тигез.

Диагональләре O ноктасында кисешкән $ABCD$ параллелограммын тикшерик (рәс. 212). Параллелограммның диагональләре кисешү ноктасы белән урталай бүленгәнлектән, AC ның яртысына тигез булган AO кисемтәсе ABD өчпочмагының медианасы була. Димәк, $AC^2 = 4AO^2 = 2AB^2 + 2AD^2 - BD^2$, моннан $AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2AD^2 = AB^2 + CD^2 + AD^2 + BC^2$, шуны исбатларга кирәк иде дә.



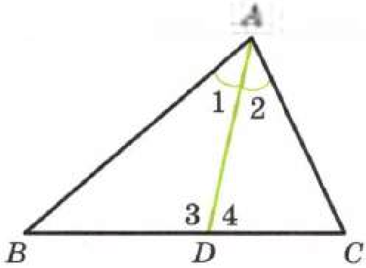
Рәс. 212

91 Өчпочмакның биссектрисасы турында теорема

Теорема

Өчпочмакның биссектрисасы аның ягын башка ике ягына пропорциональ булган өлешләргә бүлә.

$AD - ABC$ өчпочмагының биссектрисасы, ди. $\frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC}$ булуын исбатлыйк (рәс. 213).



Рәс. 213

Башта ABD өчпочмагын тикшерик. Синуслар теоремасы буенча, $\frac{DB}{\sin\angle 1} = \frac{AB}{\sin\angle 3}$, моннан

$$\frac{DB}{AB} = \frac{\sin\angle 1}{\sin\angle 3}.$$

ACD өчпочмагын тикшереп, аналогик рәвештә табабыз:

$$\frac{DC}{AC} = \frac{\sin\angle 2}{\sin\angle 4}.$$

Ләкин $\angle 2 = \angle 1$ — шарт буенча, $\angle 4 = 180^\circ - \angle 3$, шуңа күрә $\sin\angle 2 = \sin\angle 1$ һәм $\sin\angle 4 = \sin\angle 3$. Димәк, $\frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC}$. Теорема исбатланды.

Нәтиҗә

Яклары $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ һәм биссектрисасы AD булган ABC өчпочмагы өчен

$$DB = \frac{ac}{b+c},\ DC = \frac{ab}{b+c} \qquad (1)$$

тигезлекләре дөрес.

Исбатланган теоремадан $DB \cdot b = DC \cdot c$ булуы чыга. Моннан тыш, $DB + DC = a$. Бу ике тигезлектән, DB һәм DC ны чыгарып, (1) формулаларына киләбез.

Бу нәтиҗәне түбәндәге мәсьәләне чишү өчен кулланабыз.

Мәсьәлә

ABC өчпочмагының AD биссектрисасын $AB = c$, $AC = b$ яклары һәм A почмагы аша белдерергә.

Чишү

$BC = a$ булсын, ди. ABD өчпочмагына косинуслар теоремасын кулланып һәм (1) дән беренче формуланы кулланып табабыз (213 нче рәс. карагыз):

$$\frac{a^2c^2}{(b+c)^2} = AD^2 + c^2 - 2cAD\cos\frac{A}{2}. \qquad (2)$$

Аналогик рәвештә ACD өчпочмагыннан табабыз:

$$\frac{a^2b^2}{(b+c)^2} = AD^2 + b^2 - 2bAD\cos\frac{A}{2}. \qquad (3)$$

(2) һәм (3) тигезлекләрен тиңдәшле рәвештә b^2 ка һәм $-c^2$ ка тапкырлап, аннары аларны кушып, түбәндәге тигезлеккә киләбез:

$$0 = AD^2(b+c)(b-c) - 2bc(b-c)AD\cos\frac{A}{2}.$$

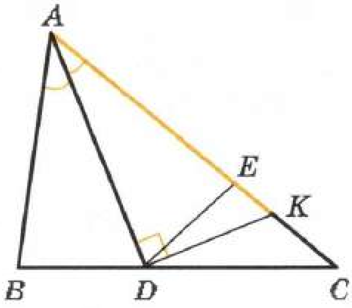
Шулай итеп, $b \neq c$ булганда табабыз:

$$AD = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}. \qquad (4)$$

(4) формуласы $b = c$ булганда да дөрес (моны үзлегегездән тикшерегез).

Искәрмәләр

1. K — D ноктасы аша AD га перпендикуляр булып үтүче турының AB һәм AC якларының зурысы белән (214 нче рәсемдә AC турысы белән) кисешү ноктасы, ди. (4) формуласыннан AK кисемтәсенең озынлыгы бу якларның озынлыкларына гына бәйле булуы һәм A почмагының зурлыгына бәйле булмавы килеп чыга: $AK = \frac{AD}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{2bc}{b+c}$. Бу фактны турыдан-туры да күрергә була. Дөрестән дә, $AE = AB$ булсын, ди. Ул вакытта DK — DCE өчпочмагының биссектрисасы (моны үзлегегездән исбатлагыз). Димәк,



Рәс. 214

$$\frac{AK - c}{b - AK} = \frac{EK}{KC} = \frac{DE}{DC} = \frac{DB}{DC} = \frac{c}{b},$$

моннан $AK = \frac{2bc}{b+c}$.

2. Әгәр $\cos\frac{A}{2}$ зурлыгын, (4) формуласыннан чыгарып, (2) формуласына куйсак, AD биссектрисасын

өчпочмакның яклары белән бәйләүче формула табыла:

$$AD^2 = bc - \frac{a^2 bc}{(b+c)^2}.$$

(1) формуласын исәпкә алсак, ул бик гади рәвешне ала:

$$AD^2 = bc - DB \cdot DC.$$

92 Өчпочмак мәйданы формулалары

1 нче теорема

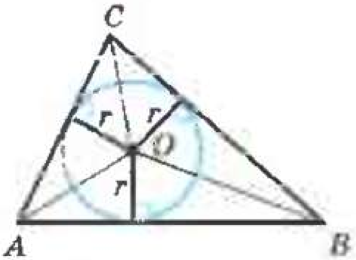
Өчпочмакның мәйданы

$$S = pr \qquad (5)$$

формуласы белән билгеләнә, биредә p — өчпочмакның ярымпериметры, r — аңа камалган әйләнәнең радиусы.

Исбатлау

Өчпочмакның түбәсен аңа камалган әйләнә үзәге белән тоташтырабыз (рәс. 215). Ул вакытта өчпочмак өч өчпочмакка бүленгән булып чыга, аларның һәрберсенең мәйданы тиңдәшле ягы белән камалган әйләнә радиусы тапкырчыгышының яртысына тигез. Бу мәйданнарны кушып һәм уртак тапкырлаучы $\frac{r}{2}$ не җәя тышына чыгарып, (5) формуласын табабыз. Теорема исбатланды.



Рәс. 215

Шулай итеп, без өчпочмакның мәйданын аңа камалган әйләнә радиусы белән бәйләүче формуланы таптык. Өчпочмакның мәйданын аны камаучы әйләнә радиусы белән бәйләүче формуланы табу өчен, синуслар теоремасын ачыклаучы түбәндәге теореманы исбатлыйк.

2 нче теорема

$AB = c$, $BC = a$ һәм $CA = b$ булган ABC өчпочмагында

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

тигезлекләре дөрес булса, биредә R — ABC өчпочмагын камаучы әйләнә радиусы.

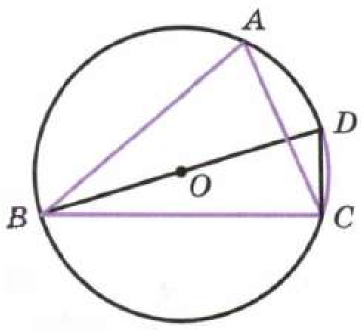
Исбатлау

ABC өчпочмагында бер почмак булса да кысынкы. Мәсәлән, A почмагы кысынкы булсын, ди. BD диаметрын үткәрик (рәс. 216) һәм DBC өчпочмагын тикшерик. Бу өчпочмакның C почмагы туры, $\angle D = \angle A$,

чөнки күрсәтелгән камаулы почмаклар бер үк BC дугасына таяналар. Димәк, $a = BC = BD \sin A = 2R \sin A$, моннан $\frac{a}{\sin A} = 2R$. Синуслар теоремасыннан файдаланып табабыз:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Теорема исбатланды.



Рәс. 216

1 нче нәтиҗә

Яклары a, b һәм c булган өчпочмакның мәйданы

$$S = \frac{abc}{4R} \quad (6)$$

формуласы белән белдерелә, биредә R — аны камаучы әйләнәнең радиусы.

Дөрестән дә, A — a ягына каршы ятучы почмак булса, $S = \frac{1}{2} bc \sin A$, ә $\sin A = \frac{a}{2R}$ була, моннан күрсәтелгән формула табыла да инде.

2 нче нәтиҗә

***ABC* өчпочмагының мәйданы**

$$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$$

формуласы белән белдерелә, биредә R— аны камаучы әйләнәнең радиусы.

Бу раслауны исбатлау өчен, (6) формуласыннан һәм 2 нче теоремадан файдалану җитә.

93 Герон формуласы

Бу пунктта без яклары a, b һәм c булган өчпочмакның мәйданы формуласын чыгарырбыз, аны борынгы грек математигы һәм инженеры Герон Александрийский (як. б. э. I г.) исеме белән бәйләп йөртәләр.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

биредә $p = \frac{a+b+c}{2}$ — өчпочмакның ярымпериметры.

Яклары $AB = c$, $BC = a$ һәм $CA = b$ булган ABC өчпочмагын тикшерик һәм аның мәйданы S ны a, b һәм c аша белдерик.

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A \quad (7)$$

булганлыктан, $\sin A$ ны табу җитә. Моны косинуслар теоремасыннан һәм төп тригонометрик бердәйлектән файдаланып эшләргә була. Дөрестән дә, косинуслар

теоремасыннан $\cos A = \frac{1}{2bc}(b^2 + c^2 - a^2)$ чыга. $\sin A \geqslant 0$ икәнен исәпкә алып, төп тригонометрик бердәйлектән табабыз:

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{1}{2bc}\sqrt{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}.$$

Тамырасты аңлатмасын тапкырлаучыларга түбәндәгечә таркатырга була:

$$(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2) =$$
$$= (b + c + a)(b + c - a)(a - b + c)(a + b - c) =$$
$$= 2p \cdot 2(p - a) \cdot 2(p - b) \cdot 2(p - c).$$

$\sin A$ өчен табылган аңлатманы (7) формуласына куеп, Герон формуласын табабыз.

Искәрмә

h_a, h_b һәм h_c — өчпочмакның a, b һәм c якларына үткәрелгән биеклекләре, S — аның мәйданы, R һәм r — камаучы һәм камаулы әйләнәләренең радиуслары.

$$h_a = \frac{2S}{a},\ h_b = \frac{2S}{b},\ h_c = \frac{2S}{c},\ R = \frac{abc}{4S},\ r = \frac{2S}{a+b+c}$$

булганлыктан (92 нче п. ны кара), Герон формуласы h_a, h_b, h_c, R һәм r зурлыкларын өчпочмакның яклары аша күрсәтергә мөмкинлек бирә.

94 Эйлер мәсьәләсе

Бу пунктта без геометриянең иң искиткеч мәсьәләләренең берсенең чишелешен китерербез, ул **Эйлер мәсьәләсе** дигән атама алган. Ләкин башта шундый билгеләмәдән башлыйбыз: **үзәге O һәм коэффициенты $k \neq 0$ булган үзәкле охшашлык дип, һәр M ноктасы $\overrightarrow{OM_1} = k\overrightarrow{OM}$ булырлык M_1 ноктасына күчкәндәге яссылыкның үзенә чагылдыруы атала.**

Коэффициенты k булган үзәкле охшашлык вакытында A һәм B нокталары A_1 һәм B_1 нокталарына күчсә, $\overrightarrow{A_1B_1} = k\overrightarrow{AB}$ икәнен исбатларга кыен түгел.

Дөрестән дә,

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1} = k\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OA} = k\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = k\overrightarrow{AB}.$$

Моннан үзәкле охшашлык вакытында O ноктасы аша үтүче туры — үзенә, O ноктасы аша үтмәүче туры аңа параллель булган турыга күчә, кисемтә кисемтәгә күчә, өчпочмак үзенә охшаш булган — өчпочмакка, үзәге C, радиусы r булган әйләнә

үзәге C_1, радиусы $|k|r$ булган әйләнәгә күчә, биредә $\overline{OC_1'} = k\overline{OC'}$. Бу раслауларны үзлегегездән исбатлагыз.

Хәзер Эйлер мәсьәләсенә күчәбез.

Эйлер мәсьәләсе

Түбәндәгеләрне исбатларга:

1) иректе өчпочмакта өчпочмакларның якларына һәм аларның урталарына карата биеклекләрнең (яки аларның дәвамнарының) кисешү ноктасы H ка симметрик нокталар камаучы әйләнәдә яталар;

2) якларның урталары, биеклекләрнең нигезләре һәм H ноктасын түбәләр белән тоташтыручы кисемтәләрнең урталары үзәге H ноктасын камаучы әйләнәнең үзәге белән тоташтыручы кисемтәнең уртасы булган, ә радиусы камаучы әйләнә радиусыннан ике тапкырга кимрәк булган бер әйләнәдә (бу әйләнә Эйлер әйләнәсе дип атала) яталар;

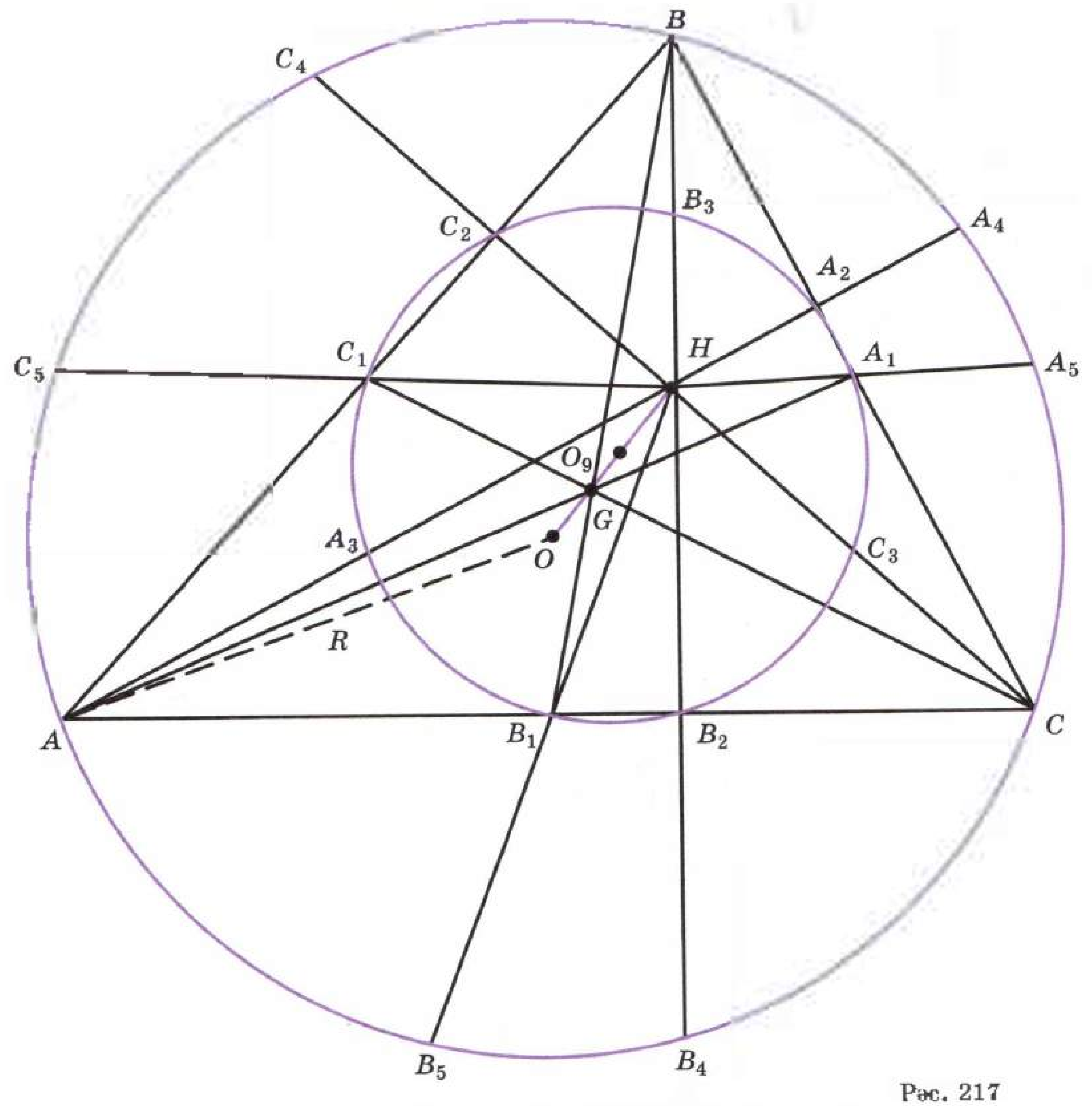
3) медианаларның кисешү ноктасы H ноктасын камаучы әйләнәнең үзәге белән тоташтыручы кисемтәдә ята һәм бу кисемтәне, камаучы әйләнәнең үзәгеннән алганда, $1:2$ чагыштырмасында бүлә (дүрт нокта — H ноктасы, медианаларның кисешү ноктасы, камаучы әйләнәнең үзәге һәм Эйлер әйләнәсенең үзәге яткан туры Эйлер турысы дип атала);

4) өчпочмакның урта сызыгын эченә алган турыга карата камаучы әйләнәнең үзәгенә симметрик нокталар Эйлер әйләнәсендә яталар.

Чишү

ABC — бирелгән өчпочмак, ди (рәс. 217). Мондый тамгаланышлар кертик: G — медианаларның кисешү ноктасы, O — камаучы әйләнәнең үзәге, R — аның радиусы, A_1, B_1 һәм C_1 — BC, CA һәм AB якларының урталары, A_2, B_2 һәм C_2 — бу якларга үткәрелгән биеклекләрнең нигезләре, A_3, B_3 һәм C_3 — AH, BH һәм CH кисемтәләренең урталары, A_4, B_4 һәм C_4 — өчпочмакның якларына карата H ноктасына симметрик нокталар. A_5, B_5 һәм C_5 — бу якларның урталарына карата H ноктасына симметрик нокталар, A_6, B_6 һәм C_6 — B_1C_1, C_1A_1 һәм A_1B_1 турыларына карата O ноктасына симметрик нокталар (рәсемдә алар билгеләнмәгән). Хәзер мәсьәләләрне чишә башлыйк.

1) ABC өчпочмагының бер почмагы, мәсәлән A почмагы, туры булса, H, B_4 һәм C_4 нокталары —



Рәс. 217

A ноктасы белән, B_5 ноктасы — C ноктасы белән, ә C_5 ноктасы B ноктасы белән тәңгәл киләләр. $\angle BA_4C = \angle BA_5C = \angle A = 90^\circ$ булганлыктан, A, A_4 һәм A_5 нокталары диаметры BC булган әйләнәдә яталар (88 нче п. ны карагыз). Шулай итеп, A_4, A_5, B_4, B_5, C_4, C_5 нокталары ABC өчпочмагын камаучы әйләндә яталар.

ABC өчпочмагы турыпочмаклы түгел, ди. $\angle AB_2H = \angle AC_2H = 90^\circ$ булганлыктан, B_2 һәм C_2 нокталары AH диаметрлы әйләнәдә яталар (88 нче п. ны карагыз). Димәк, бу әйләнәгә карата камаулы B_2AC_2 һәм B_2HC_2 почмаклары һәм, димәк, BAC һәм BHC почмаклары я тигез, я суммасы 180° тәшкил итә. Теге һәм бу очракта да $\sin \angle BHC = \sin \angle BAC$.

R_1 — HBC өчпочмагын камаучы әйләнә радиусы, ди. 2 нче теорема буенча, 92 нче п. тан $BC = 2R_1 \sin \angle BHC = 2R \sin \angle BAC$ чыга. Ләкин $\sin \angle BHC = \sin \angle BAC$. Димәк, $R_1 = R$. Моннан ABC һәм HBC өчпочмакларын камаучы әйләнә BC турысына карата һәм BC кисемтәсе уртасына карата симметрик. H ноктасы HBC өчпочмагын камаучы әйләнәдә ята. Димәк, аңа симметрик A_4 һәм A_5 нокталары ABC өчпочмагын камаучы әйләнәдә ята. Аналогик рәвештә B_4, B_5, C_4 һәм C_5 нокталарының шулай ук бу әйләнәдә ятуы исбатлана.

2) Үзәге H һәм коэффициенты $\frac{1}{2}$ булган үзәкле охшашлыкны тикшерик. Бу охшашлык вакытында камаучы әйләнә радиусы $\frac{R}{2}$ булган әйләнәгә күчә (рәс. 217), аның O_9 үзәге OH кисемтәсенең уртасы була, камаучы әйләнәнең A_5, B_5, C_5, A_4, B_4, C_4, A, B, C нокталары тиңдәшле рәвештә A_1, B_1, C_1 (якларның урталары), A_2, B_2 һәм C_2 (биеклекләрнең урталары), A_3, B_3 һәм C_3 (AH, BH, CH кисемтәләренең урталары) нокталарына күчә. Димәк, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3 нокталары үзәге O_9 радиусы $\frac{R}{2}$ әйләнәсендә ята. Раслау исбатланды.

3) Үзәге G һәм коэффициенты $-\frac{1}{2}$ булган үзәкле охшашлыкны тикшерик. ABC өчпочмагының медианалары G ноктасы белән $1:2$ чагыштырмасында бүленәләр, шуңа күрә тикшерелә торган үзәкле охшашлыкта A, B һәм C түбәләре капма-каршы якларның A_1, B_1 һәм C_1 урталарына күчәләр. Димәк, өчпочмакның биеклекләрен эченә алган турылар аның якларына перпендикуляр булган һәм аларның урталары аша үтүче турыларга, ягъни якларына урта перпендикулярга күчәләр. Шуңа күрә H ноктасы камаучы әйләнә үзәге O га күчә. Бу — G ноктасының OH кисемтәсендә ятуын һәм аны, O ноктасыннан исәпләгәндә, $1:2$ чагыштырмасында бүлүен аңлата. Шуны исбатларга кирәк иде дә.

4) Үзәге G һәм коэффициенты $-\frac{1}{2}$ булган үзәкле охшашлыкта A, B һәм C түбәләре капма-каршы якларның A_1, B_1 һәм C_1 урталарына, ә H ноктасы O ноктасына күчүен билгеләп үткән идек. Моннан: а) ABC өчпочмагын камаучы әйләнә Эйлер әйләнәсенә күчүе чыга; б) H ноктасына BC, CA һәм AB турыларына карата симметрик булган камаучы әйләнәнең A_4, B_4 һәм

C_4 нокталары Эйлер әйләнәсенең B_1C_1, C_1A_1 һәм A_1B_1 турыларына карата O ноктасына симметрик булган A_6, B_6 һәм C_6 нокталарына күчәләр. Шулай итеп, A_6, B_6 һәм C_6 нокталары Эйлер әйләнәсендә яталар.

Мәсьәләләр

836 ABC өчпочмагының BC ягында, $BD : AB = DC : AC$ булырлык итеп, D ноктасы билгеләнгән AD кисемтәсе ABC өчпочмагының биссектрисасы булуын исбатлагыз.

837 ABC өчпочмагының A түбәсе янындагы тышкы почмагының биссектрисасы BC турысын D ноктасында кисеп үтә. $BD : AB = DC : AC$ булуын исбатлагыз.

838 Яклары $AB = c$, $BC = a$ һәм $CA = b$ булган ABC өчпочмагының AA_1, BB_1 һәм CC_1 биссектрисалары O ноктасында кисешәләр. а) $\frac{AO}{OA_1}$, $\frac{BO}{OB_1}$, $\frac{CO}{OC_1}$ чагыштырмаларын табыгыз. б) $\frac{AO}{AA_1} + \frac{BO}{BB_1} + \frac{CO}{CC_1} = 2$, $\frac{OA_1}{AA_1} + \frac{OB_1}{BB_1} + \frac{OC_1}{CC_1} = 1$ булуын исбатлагыз. в) Өчпочмакның бер генә биссектрисасы булса да O ноктасы белән урталай бүленә аламы? г) Биссектрисаларның берсе, O ноктасы белән өчпочмакның түбәсеннән исәпләгәндә, $2:1$ чагыштырмасында бүленә шул вакытта һәм бары шул вакытта, әгәр өчпочмак якларының берсе калган ике ягының ярымсуммасына тигез булса.

839 Өчпочмакның ике ягының тапкырчыгышы өченче ягына үткәрелгән биеклек белән камаучы әйләнәнең диаметры тапкырчыгышына тигез булуын исбатлагыз.

840 ABC өчпочмагы эчендә M ноктасы алынган. Әгәр M ноктасы ABC өчпочмагының B түбәсеннән үткәрелгән медианасында ятса, BAM һәм BCM өчпочмакларының мәйданнары шул вакытта һәм бары шул вакытта гына тигез.

841 Бирелгән өчпочмакның медианаларыннан өчпочмак төзергә мөмкин булуын исбатлагыз һәм аның мәйданының бирелгән өчпочмак мәйданына чагыштырмасын табыгыз.

842 Өчпочмакның биеклекләре 3 см, 4 см һәм 6 см га тигез булса, аның мәйданын табыгыз.

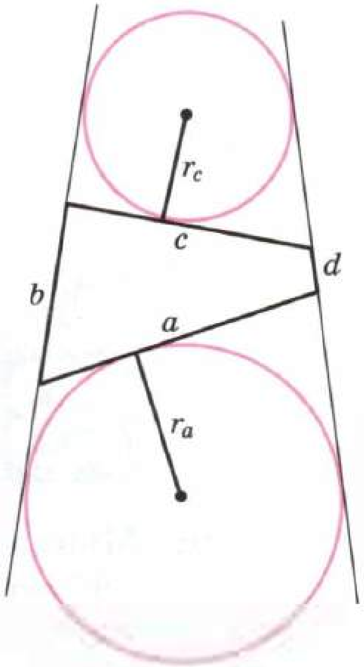
843 Өчпочмакның мәйданнары 9 см, 12 см һәм 15 см га тигез булса, аның мәйданын табыгыз.

844 ABC өчпочмагына камалган әйләнә аның якларына L, M һәм N нокталарында орына. LMN өчпочмагы мәйданының ABC өчпочмагы мәйданына чагыштырмасы ABC өчпочмагына камалган әйләнә радиусының бу өчпочмакны камаучы әйләнәнең диаметрына чагыштырмасына тигез булуын исбатлагыз.

845 Өчпочмакның ягына һәм башка ике ягының дәвамнарына орынучы әйләнә тышкы камаулы дип атала. Исбатлагыз: а) ABC

өчпочмагының мәйданы $S = r_a(p - a)$ формуласы белән белдерелә, биредә r_a — $BC = a$ ягына орынучы тышкы камаулы әйләнә радиусы, p — өчпочмакның ярымпериметры; б) $S = \sqrt{rr_ar_br_c}$, $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$, биредә r — өчпочмакка камаулы әйләнә радиусы, r_a, r_b, r_c — тышкы камаулы әйләнә радиуслары.

846 Яклары a, b, c, d һәм ярымпериметры p булган кабарынкы дүртпочмакның S мәйданы $S = r_a(p - a) + r_c(p - c)$ формуласы аша белдерелүен исбатлагыз, биредә r_a һәм r_c — a һәм c га тигез булган якларына орынучы тышкы камаулы әйләнәләрнең радиуслары (рәс. 218).



Рәс. 218

847 Исбатлагыз: а) яклары a, b, c, d һәм ярымпериметры p булган кабарынкы дүртпочмакның S мәйданы квадраты

$$S^2 = (p - a)(p - b)(p - c)(p - d) - abcd\cos^2\frac{B + D}{2}$$

формуласы белән белдерелә; б) камаулы дүртпочмакның S мәйданы $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ формуласы белән белдерелә; бу формуладан чыгып, өчпочмакның мәйданы өчен Герон формуласын табыгыз.

848 Исбатлагыз: а) әйләнәне камаучы яклары a, b, c, d булган дүртпочмакның S мәйданы $S = \sqrt{abcd}\,\sin\frac{B + D}{2}$ формуласы белән белдерелә; б) яклары a, b, c, d булган дүртпочмак бер үк вакытта камаучы һәм камаулы булса, аның S мәйданы $S = \sqrt{abcd}$ формуласы белән белдерелә.

849 AD, AH һәм AM кисемтәләре — ABC өчпочмагының биссектрисасы, биеклеге һәм медианасы, өчпочмакка камалган әйләнә BC ягына K ноктасында орына. $MK^2 = MD \cdot MH$ икәнен исбатлагыз.

850 Яклары $AB = c$, $BC = a$ һәм $CA = b$ булган ABC өчпочмагында r һәм R — камаулы һәм камаучы әйләнәләрнең радиуслары, S — мәйдан, O ноктасы — камаучы әйләнәнең үзәге, H — биеклекләрнең кисешү ноктасы, AD һәм AM кисемтәләре — биеклек һәм медиана. Исбатлагыз:

а) $a + b = 4R\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{|A-B|}{2}$; б) $|a - b| = 4R\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{|A-B|}{2}$;

в) $\frac{|a-b|}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}|A-B|}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)}$; г) $\frac{a^2-b^2}{c} = a\cos B - b\cos A$;

д) $a + b + c = 8R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$;

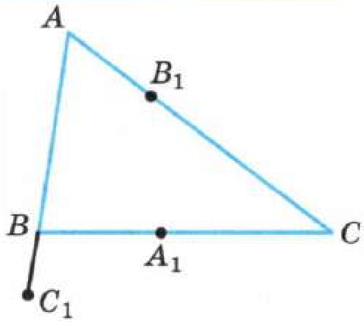
е) $\cos^2 A = \sin^2 B + \cos^2 C - 2\sin A\sin B\cos C$;

ж) $r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$; з) $r = \dfrac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$;

и) $AH = \frac{a}{4S}(b^2 + c^2 - a^2)$; к) $OH^2 = 9R^2 - a^2 - b^2 - c^2$; л) $DM = \dfrac{|b^2 - c^2|}{2a}$.

§3 Менелай һәм Чева теоремалары

95 Менелай теоремасы



Рәс. 219

ABC өчпочмагын тикшерик һәм AB, BC һәм CA турыларында аның түбәсе белән тәңгәл килмәгән C_1, A_1 һәм B_1 нокталарын билгелик (рәс. 219). $\overrightarrow{AC_1} = p\overrightarrow{C_1B}$, $\overrightarrow{BA_1} = q\overrightarrow{A_1C}$, $\overrightarrow{CB_1} = r\overrightarrow{B_1A}$ булсын, ди. C_1, A_1, B_1 нокталары ABC өчпочмагының түбәләре белән тәңгәл килмәгәнлектән, p, q, r саннары нульдән аермалы була. Моннан тыш, бу саннарның һәрберсе -1 дән аермалы. Дөрестән дә, әгәр, мәсәлән, $p = -1$ булса, $\overrightarrow{AC_1} = -\overrightarrow{C_1B}$, моннан $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{C_1B} = \overrightarrow{AB} = \vec{0}$, ягъни A һәм B түбәләре тәңгәл килә, ә бу шартка каршы килә.

Хәзер шундый сорау куябыз: p, q, r саннары нинди чагыштырмада булганда, C_1, A_1, B_1 нокталары бер турыда яталар. Бу сораугa җавапны б. э. ның I гасырында яшәгән борынгы грек математигы һәм астрономы Менелай Александрийский исеме белән бәйле теорема бирә.

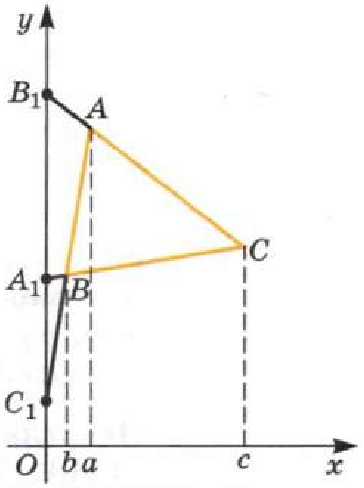
Теорема

***ABC* өчпочмагының *AB*, *BC* һәм *CA* якларында яки аларның дәвамнарында аның түбәсе белән тәңгәл килмәгән C_1, A_1, B_1 нокталары билгеләнгән булсын, өстәвенә $\overrightarrow{AC_1} = p\overrightarrow{C_1B}$, $\overrightarrow{BA_1} = q\overrightarrow{A_1C}$, $\overrightarrow{CB_1} = r\overrightarrow{B_1A}$. Ул вакытта, әгәр C_1, A_1, B_1 нокталары бер турыда ятсалар, $pqr = -1$ була; киресе: әгәр $pqr = -1$ булса, C_1, A_1, B_1 бер турыда яталар.**

Исбатлау

1) Башта C_1, A_1, B_1 нокталары бер турыда яталар дип фараз итик һәм $pqr = -1$ булуын исбатлыйк.

Турыпочмаклы Oxy координаталар системасын C_1, A_1, B_1 нокталары Oy күчәрендә ятарлык итеп кертик (рәс. 220). a, b һәм c — A, B һәм C нокталарының абсциссалары, ди. $\overrightarrow{AC_1} = p\overrightarrow{C_1B}$ тигезлегеннән $0 - a = p(b - 0)$ булуы чыга, ягъни $a = -pb$. Аналогик рәвештә $\overrightarrow{BA_1} = q\overrightarrow{A_1C}$ һәм $\overrightarrow{CB_1} = r\overrightarrow{B_1A}$ тигезлекләреннән табабыз: $b = -qc$ һәм $c = -ra$. Шулай итеп, $a = -pb = pqc = -pqra$, яки $a(pqr + 1) = 0$, шуңа күрә яки $a = 0$, яки $pqr = -1$. Әгәр $a = 0$ булса, $c = -ra = 0$ һәм $b = -qc = 0$, ягъни A, B һәм C нокталары бер турыда (Oy күчәрендә) яталар, ә бу шартка каршы килә. Димәк, $pqr = -1$, шуны исбатларга кирәк иде дә.



Рәс. 220

2) Хәзер $pqr = -1$ дип фараз итик һәм C_1, A_1, B_1 нокталарының бер турыда ятуын исбатлыйк. Турыпочмаклы Oxy координаталар системасын C_1 һәм A_1 нокталары Oy күчәрендә ятарлык итеп кертик (220 нче рәс. карагыз). Баштагыча a, b һәм c — A, B һәм C нокталарының абсциссалары, x — B_1 ноктасының абсциссасы, ди. $\overrightarrow{AC_1} = p\overrightarrow{C_1B}$ һәм $\overrightarrow{BA_1} = q\overrightarrow{A_1C}$ тигезлекләреннән, күргәнебезчә: $a = -pb$ һәм $b = -qc$ булуы чыга. Шулай итеп, $a = pqc$. $\overrightarrow{CB_1} = r\overrightarrow{B_1A}$ тигезлегеннән $x - c = r(a - x)$ булуы чыга. Бу тигезлекнең ике кисәген дә pq га тапкырлап һәм $pqr = -1$, $pqc = a$ булуын исәпкә алып табабыз. $pqx - a = -a + x$, яки $(pq - 1)x = 0$. Әгәр $pq = 1$ булса, $pqr = -1$ тигезлегеннән $r = -1$ булуы чыга, ә бу алда әйтелгәнчә булуы мөмкин түгел. Шулай итеп, $pq \neq 1$, димәк, $x = 0$. Димәк, C_1, A_1, B_1 нокталары бер турыда (Oy күчәрендә) яталар. Теорема исбатланды.

96 Чева теоремасы

Яңадан ABC өчпочмагын тикшерик һәм AB, BC һәм CA турыларында аның түбәләре белән тәңгәл килмәгән C_1, A_1, B_1 нокталарын билгелик (219 нчы рәс. карагыз). $\overrightarrow{AC_1} = p\overrightarrow{C_1B}$, $\overrightarrow{BA_1} = q\overrightarrow{A_1C}$, $\overrightarrow{CB_1} = r\overrightarrow{B_1A}$ булсын. Бу вакытта p, q, $r \neq 0$ һәм p, q, $r \neq -1$ (95 нче п. ны карагыз). Мондый сорау куйыйк: p, q, r саннары нинди чагыштырмада булганда, AA_1, BB_1 һәм CC_1 турылары бер турыда яталар? Бу сорауга җавапны итальян математигы һәм инженеры Джованни Чева (1648—1734) исеме белән бәйле теорема бирә.

Теорема

***ABC* өчпочмагының *AB*, *BC* һәм *CA* якларында яки аларның дәвамнарында аның түбәсе белән тәңгәл килмәгән C_1, A_1, B_1 нокталары билгеләнгән, өстәвенә $\overrightarrow{AC_1} = p\,\overrightarrow{C_1B}$, $\overrightarrow{BA_1} = q\,\overrightarrow{A_1C}$, $\overrightarrow{CB_1} = r\,\overrightarrow{B_1A}$. Ул вакытта, әгәр AA_1, BB_1, CC_1 турылары бер ноктада кисешсәләр яки пар-пар параллель булсалар, $pqr = 1$ була; киресе: әгәр $pqr = 1$ булса, AA_1, BB_1, CC_1 турылары бер ноктада кисешәләр яки пар-пар параллель булалар.**

Исбатлау

1) AA_1, BB_1 һәм CC_1 турылары нинди дер O ноктасында кисешәләр, ди (рәс. 221, *а*, *б*). LMN өчпочмагының мәйданын, әгәр L, M, N түбәләренең йөреше сәгать теле йөрешенә каршы булса, «+» тамгасы белән алынган $S(L, M, N)$ аша тамгаларга килешәбез, һәм «−» тамгасы белән — капма-каршы очракта. $\dfrac{S(A, B, A_1)}{S(A, A_1, C)} = q$ һәм $\dfrac{S(O, B, A_1)}{S(O, A_1, C)} = q$ булганлыктан (бу тигезлекләрне дәлилләгез), $S(A, B, A_1) = qS(A, A_1, C)$ һәм $S(O, B, A_1) = qS(O, A_1, C)$. Димәк,

$$\frac{S(A, B, O)}{S(A, O, C)} = \frac{S(A, B, A_1) - S(O, B, A_1)}{S(A, A_1, C) - S(O, A_1, C)} =$$

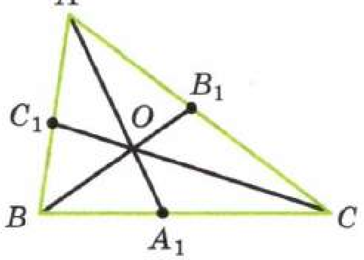
$$= q\,\frac{S(A, A_1, C) - S(O, A_1, C)}{S(A, A_1, C) - S(O, A_1, C)} = q.$$

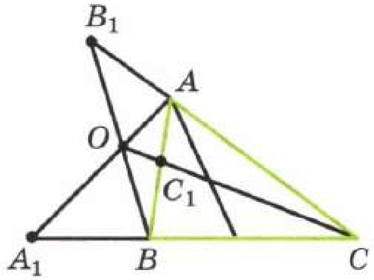
Шулай итеп, $q = \dfrac{S(A, B, O)}{S(A, O, C)}$. Аналогик рәвештә $r = \dfrac{S(B, C, O)}{S(B, O, A)}$ һәм $p = \dfrac{S(C, A, O)}{S(C, O, B)}$. Бу тигезлекләрне тапкырлап һәм $S(A, B, O) = S(B, O, A)$, $S(A, O, C) = S(C, A, O)$, $S(B, C, O) = S(C, O, B)$ икәнен искәреп табабыз:

$$pqr = \frac{S(C, A, O)}{S(C, O, B)} \cdot \frac{S(B, O, A)}{S(C, A, O)} \cdot \frac{S(C, O, B)}{S(B, O, A)} = 1,$$

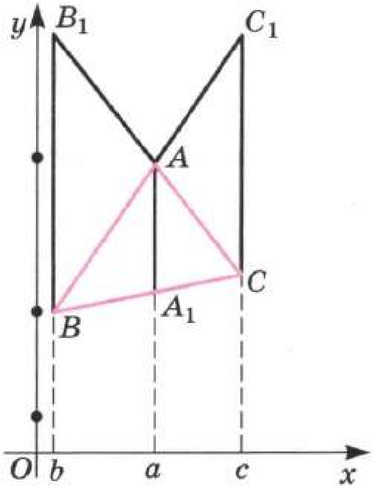
шуны исбатларга кирәк иде дә.

AA_1, BB_1 һәм CC_1 турылары пар-пар параллель дип фараз итик. Турыпочмаклы Oxy координаталар системасын Oy күчәре AA_1 турысына параллель булырлык итеп кертәбез. a — A һәм A_1 нокталарының абсциссасы, b — B һәм B_1 нокталарының абсциссасы, c — C һәм C_1 нокталарының абсциссасы, ди (рәс. 222).





Рәс. 221



Рәс. 222

$$\overrightarrow{AC_1} = p\overrightarrow{C_1B}, \ \overrightarrow{BA_1} = q\overrightarrow{A_1C} \ \text{һәм} \ \overrightarrow{CB_1} = r\overrightarrow{B_1A}$$

тигезлекләреннән $(c-a)=p(b-c)$, $(a-b)=q(c-a)$ һәм $(b-c)=r(a-b)$ чыга. $c \neq b$, $c \neq a$ һәм $a \neq b$ булуын исәпкә алып (башкача булганда, A, B һәм C нокталары Oy күчәренә параллель турыларда ятарлар иде) табабыз: $p=\frac{c-a}{b-c}$, $q=\frac{a-b}{c-a}$, $r=\frac{b-c}{a-b}$, һәм, димәк, $pqr=\frac{c-a}{b-c} \times \frac{a-b}{c-a} \cdot \frac{b-c}{a-b}=1$, шуны исбатларга кирәк иде дә.

2) Хәзер $pqr=1$ дип фараз итик һәм AA_1, BB_1 һәм CC_1 турыларының бер ноктада кисешкәннәрен яки пар-пар параллель булуын исбатлыйк.

Күрсәтелгән өч турының берниндн икесенең уртак нокталары булмаса, алар пар-пар параллель була.

Әгәр дә аларның нинди дә булса икесе, мәсәлән AA_1 һәм BB_1 турылары, ниндидер O ноктасында кисешсәләр, болай эшлибез: CO турысы үткәрәбез (221 нче рәс. карагыз). $pqr=1$ һәм $p \neq -1$ булганлыктан, 1 пунктында исбатланган буенча,

$$qr=\frac{S(A,B,O)}{S(A,O,C)} \cdot \frac{S(B,C,O)}{S(B,O,A)}=\frac{S(B,C,O)}{S(A,O,C)}=-\frac{S(B,C,O)}{S(A,C,O)} \neq -1,$$

шуңа күрә $S(B,\ C,\ O) \neq S(A,\ C,\ O)$. Моннан CO һәм AB турыларының параллель булуы чыга (ни өчен икәнен аңлатыгыз). C_2 — аларның кисешү ноктасы, $\overrightarrow{AC_2}=t\overrightarrow{C_2B}$ булсын. AA_1, BB_1 һәм CC_2 турылары бер ноктада кисешкәнгә күрә, п. 1) дә исбатланган буенча, $tqr=1$ була, моннан $t=\frac{1}{qr}=p$.

Шулай итеп, $\overrightarrow{AC_1}=p\overrightarrow{C_1B}$ һәм $\overrightarrow{AC_2}=q\overrightarrow{C_2B}$.

Бер тигезлектән икенчесен алып табабыз: $\overrightarrow{AC_2}-\overrightarrow{AC_1}= =p(\overrightarrow{C_2B}-\overrightarrow{C_1B})$, яки $\overrightarrow{C_1C_2}=-p\overrightarrow{C_1C_2}$, ягъни $(p+1)\overrightarrow{C_1C_2}=\vec{0}$. $p \neq -1$ икәнен исәпкә алып, $\overrightarrow{C_1C_2}=\vec{0}$ тигезлеген табабыз. Димәк, C_1 һәм C_2 нокталары тәңгәл килә. Бу AA_1, BB_1 һәм CC_1 турыларының бер ноктада (O ноктасында) кисешүен аңлата. Теорема исбатланды.

Мәсьәләләр

851 AA_1 һәм BB_1 кисемтәләре — ABC өчпочмагының биссектрисалары, CC_1 нуры — аның тышкы почмагының биссектрисасы, өстәвенә C_1 ноктасы AB турысында ята. A_1, B_1 һәм C_1 нокталарының бер турыда ятуын исбатлагыз.

852 ABC өчпочмагының тышкы A, B һәм C почмакларының биссектрисалары капма-каршы якларның дәвамнарын A_1, B_1 һәм C_1 нокталарында кисәләр. A_1, B_1 һәм C_1 нокталарының бер турыда ятуын исбатлагыз.

853 ABC өчпочмагының BC, CA һәм AB якларында яки аларның дәвамнарында бер турыда ятучы тиңдәшле рәвештә A_1, B_1 һәм C_1 нокталары билгеләнгән. BC, CA һәм AB якларының урталарына карата тиңдәшле рәвештә A_1, B_1 һәм C_1 нокталары симметрик булган A_2, B_2 һәм C_2 нокталары шулай ук бер турыда ятуын исбатлагыз.

854 Трапеция нигезләренең урталары, аның диагональләре кисешү ноктасы һәм ян-якларының дәвамнары кисешү ноктасы бер турыда ятуларын исбатлагыз.

855 $ABCD$ дүртпочмагының AB, BC, CD һәм DA якларында дүртпочмакның түбәләре белән тәңгәл килмәүче тиңдәшле рәвештә K, L, M һәм N нокталары билгеләнгән. Исбатлагыз: а) KL, MN һәм AC турылары, $\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MD}\cdot\frac{DN}{NA}=1$ булганда һәм бары шул вакытта, бер ноктада кисешәләр яки бер-берсенә параллель булалар; б) KL, MN һәм AC турылары кисешәләр яки бер-берсенә параллель булалар шул вакытта һәм бары шул вакытта, әгәр дә бу KN, LM һәм BD турыларына карата да дөрес булса.

856 $ABCD$ дүртпочмагына камалган әйләнә AB, BC, CD һәм DA якларында тиңдәшле рәвештә P, Q, R һәм S нокталарында орына. PQ, RS һәм AC турыларының бер ноктада кисешүләрен яки бер-берсенә параллель булуын исбатлагыз.

857 O үзәкле әйләнә үзәкләре O_1 һәм O_2 булган тигезсез ике әйләнәгә тиңдәшле рәвештә A_1 һәм A_2 нокталарында орына. A_1A_2 турысының O_1O_2 турысы белән үзәкләре O_1 һәм O_2 булган әйләнәләргә уртак орынманың (тышкы яки эчке) кисешү ноктасы аша үтүен исбатлагыз.

858 ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмаклары AB һәм A_1B_1, BC һәм B_1C_1, CA һәм C_1A_1 турылары P, Q, R нокталарында кисешерлек итеп урнашканнар. AA_1, BB_1, CC_1 турылары бер ноктада кисешәләр яки пар-пар параллель булалар шул вакытта һәм бары шул вакытта P, Q һәм R нокталары бер турыда ятсалар (Дезарг теоремасы), шуны исбатлагыз.

859 ABC өчпочмагының BC ягында BC ның уртасына карата симметрик булган A_1 һәм A_2 нокталары билгеләнгән, ә AC һәм AB якларында бу якларның урталарына карата симметрик булган тиңдәшле рәвештә B_1, B_2 һәм C_1, C_2 нокталары билгеләнгән. AA_1, BB_1 һәм CC_1 кисемтәләре бер ноктада шул вакытта һәм бары шул вакытта кисешәләр, әгәр AA_2, BB_2 һәм CC_2 кисемтәләре бер ноктада кисешсәләр, шуны исбатлагыз.

860 Әйләнә ABC өчпочмагының BC ягын — A_1 һәм A_2 нокталарында, AC ягын — B_1 һәм B_2 нокталарында, AB ягын C_1 һәм C_2 нокталарында кисеп үтә. AA_1, BB_1 һәм CC_1 кисемтәләре бер ноктада шул вакытта һәм бары шул вакытта кисешәләр, әгәр AA_2, BB_2 һәм CC_2 кисемтәләре бер ноктада кисешсәләр, шуны исбатлагыз.

861 ABC өчпочмагының AC ягында — P һәм E нокталары, ә BC ягында M һәм K нокталары билгеләнгән, өстәвенә $AP : PE : EC = CK : KM : MB$. AM һәм BP кисемтәләре O ноктасында, ә AK һәм BE кисемтәләре T ноктасында кисешәләр. O, T һәм C нокталарының бер турыда ятуын исбатлагыз.

862 ABC өчпочмагының AB, BC һәм CA якларында (яки якларның берсендә һәм башка ике якның дәвамнарында) тиңдәшле рәвештә C_1, A_1 һәм B_1 нокталары билгеләнгән. AA_1, BB_1 һәм CC_1 турылары бер ноктада кисешәләр шул вакытта һәм бары шул вакытта, әгәр:

а) $\frac{\sin\angle ACC_1}{\sin\angle C_1CB}\cdot\frac{\sin\angle BAA_1}{\sin\angle A_1AC}\cdot\frac{\sin\angle CBB_1}{\sin\angle B_1BA}=1$;

б) AB, BC һәм CA турыларында ятмаган теләсә нинди O ноктасы өчен $\frac{\sin\angle AOC_1}{\sin\angle C_1OB}\cdot\frac{\sin\angle BOA_1}{\sin\angle A_1OC}\cdot\frac{\sin\angle COB_1}{\sin\angle B_1OA}=1$ тигезлеге үтәлсә.

§4 Эллипс, гипербола һәм парабола

97 Эллипс

Эллипс әле борынгы заманнан ук — геометрия үзенең сүзгә-сүз тәрҗемәсенә (Җир үлчәү) туры килгән вакыттан билгеле булган. Ул вакытта, җир өстендә төзү эшләре башкару өчен, туры һәм әйләнә үткәрергә ярдәм итүче төп инструментлар булып казык һәм баулар торган, хәзер аларны циркуль һәм линейка ярдәмендә төзүләр дип атыйлар.

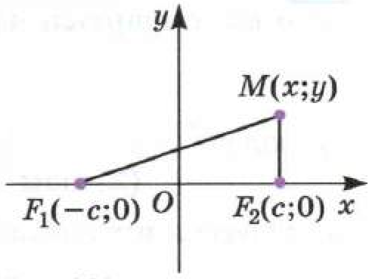
Күрсәтелгән инструментлар ярдәмендә әйләнәне ничек төзергә икәне ачык аңлашыла: бауның бер очын беркетергә һәм тарттырылган килеш икенче очы белән сызык сызарга кирәк. Шундый сорау туа: тарттырылган бауның ике очын беркетеп, тарттырылган килеш сызык сызсаң, нәрсә килеп чыга? Эллипс килеп чыга. Шулай итеп, түбәндәге билгеләмәне табабыз.

Билгеләмә

Ике билгеләнгән ноктасына кадәрге ераклыклар суммасы даими булган яссылыкның барлык шундый нокталары күплеге **эллипс** дип атала.

Билгеләнгән нокталар эллипсның **фокуслары** дип атала.

$2c$ — фокуслар арасындагы ераклык, $2a$ — эллипс ноктасыннан фокуска кадәрге ераклыклар суммасы. Турыпочмаклы Oxy координаталар системасын F_1 һәм F_2 фокусларының координаталары $F_1(-c;\ 0)$ һәм $F_2(c;\ 0)$ булырлык итеп кертәбез (рәс. 223) һәм бу координаталар системасында эллипс тигезләмәсен



Рәс. 223

чыгарабыз. Безнең алда торган мәсьәләләрне болай тәгъбирләргә була:

$$MF_1 + MF_2 = 2a$$

булырлык барлык $M(x; y)$ нокталары күплеген табарга.

Өчпочмак тигезлегеннән $MF_1 + MF_2 \geqslant F_1F_2$, ягъни $a \geqslant c$ булуы чыга. $a = c$ булганда, эллипс F_1F_2 кисемтәсенә әверелә, шуңа күрә $a > c$ дип исәплибез.

$MF_1 = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$, $MF_2 = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$ булганлыктан, эллипсның тигезләмәсе түбәндәге рәвештә була:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a. \qquad (1)$$

Бу тигезлекнең ике кисәген дә анда булган тамырларның аермасына тапкырлыйбыз, ә аннары $2a$ га бүләбез. Нәтиҗәдә табабыз:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \frac{1}{2a}((x+c)^2-(x-c)^2) = \frac{2cx}{a}.$$

Бу тигезлектән һәм (1) тигезлегеннән файдаланып, бу тамырларның һәрберсен чыгарырга була:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = a + \frac{cx}{a}, \qquad (2)$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a - \frac{cx}{a}. \qquad (3)$$

(2) тигезлегенең ике кисәген дә квадратка күтәреп һәм охшаш буыннарны китереп табабыз:

$$x^2 + c^2 + y^2 = a^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2. \qquad (4)$$

(3) тигезлегенең ике кисәген дә квадратка күтәрү шундый ук нәтиҗәне бирә.

(4) тигезләмәсен түбәндәге рәвештә язабыз:

$$\frac{a^2-c^2}{a^2}x^2 + y^2 = a^2 - c^2.$$

$a \neq c$ булганлыктан, табылган тигезлекне болай күчереп язарга була:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1, \qquad (5)$$

яки $a > c$ шартын исәпкә алып болай язабыз:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (6)$$

биредә $b^2 = a^2 - c^2 \leqslant a^2$.

(2) һәм (3) тигезлекләренең ике кисәген дә квадратка күтәргәндә, $a \pm \frac{cx}{a} < 0$ очрагына туры килгән артык тамырлар чыгарга мөмкин. Ләкин ул булмый:

(6) тигезлегеннән күренгәнчә, $|x| \leqslant a$, шуңа күрә $\left|\frac{cx}{a}\right| \leqslant c < a$, һәм, димәк, $a \pm \frac{cx}{a} > 0$. Шулай итеп, (6) тигезләмәсе (1) тигезләмәсенә эквивалент. Ул эллипсның **каноник тигезләмәсе** дип атала.

(6) тигезләмәсе эллипсның түбәндәге үзлекләрен табарга мөмкинлек бирә.

1. Эллипсның ике симметрия үзәге (координаталар башлангычы O) һәм ике үзара перпендикуляр симметрия күчәрләре (Ox һәм Oy күчәрләре) бар. Бу күчәрләр **эллипсның күчәрләре** дип атала: фокуслар ятканы **зур күчәр** дип, ә икенчесе **кечкенә күчәр** дип атала; a һәм b зурлыклары **зур һәм кечкенә ярымкүчәрләр** дип атала.

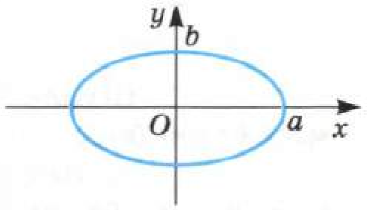
2. $\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$ һәм $\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \leqslant 1$ булганлыктан, эллипс тулаем яклары аның күчәрләренә параллель булган турыпочмаклыкта ята ($|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$).

3. $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ булганда, (6) тигезләмәсе

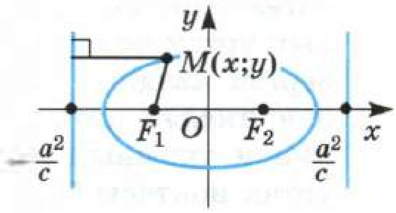
$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

рәвешендә язылырга мөмкин.

$y(x)$ функциясе, $x = 0$ булганда, $y = b$ кыйммәтеннән, $x = a$ булганда, $y = 0$ кыйммәтенә кадәр монотон кими. Ачыкланган симметрияләр эллипсны төзергә мөмкинлек бирә (рәс. 224, *а*).



а)



б)

Рәс. 224

Искәрмәләр

1. (2) тигезләмәсен тикшерик:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = a + \frac{cx}{a}.$$

Аннан, белгәнебезчә, (6) тигезләмәсе чыга. Икенче яктан, (6) тигезләмәсеннән (4) тигезләмәсе һәм $a + \frac{cx}{a} > 0$ тигезсезлеге чыга. (4) тигезләмәсен

$$(x + c)^2 + y^2 = \left(a + \frac{cx}{a}\right)^2$$

рәвешендә язып һәм $a + \frac{cx}{a} > 0$ тигезсезлеген исәпкә алып, (2) тигезләмәсен табабыз. Аны болай итеп күчереп язабыз:

$$\frac{\sqrt{(x+c)^2+y^2}}{x + \frac{a^2}{c}} = \frac{c}{a}.$$

Бу тигезләмәнең сул ягының санаучысы MF_1 гә тигез, ә аның ваклаучысы M ноктасыннан $x=-\frac{a^2}{c}$ тигезләмәсе белән бирелгән турыга кадәрге ераклыкка тигез (рәс. 224, *б*). Бу туры эллипсның F_1 **фокусына туры килгән директрисасы** дип атала. Шулай ук тигезлекнең сул ягы M ноктасына бәйле түгел һәм 1 дән кимрәк икәнен билгеләп үтәбез. **Шулай итеп, эллипс дип яссылыкның билгеләнгән ноктага (фокуска) кадәрге ераклыкның билгеләнгән турыга (директрисага) кадәрге ераклыкка чыгыштырмасы даими һәм бердән кимрәк булган барлык нокталарының күплеге атала.**

Күрсәтелгән чагыштырма $\left(\frac{c}{a}\text{ га тигез булган}\right)$ **эллипсның эксцентриситеты** дип атала.

(2) тигезләмәсенә кулланылган фикер йөртүләрне (3) тигезләмәсенә дә кулланырга мөмкин. Димәк, (3) тигезләмәсе (6) тигезләмәсенә тигезкөчле. Аны болай язарга була:

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{\frac{a^2}{c}-x}=\frac{c}{a}.$$

Шулай итеп, F_2 фокусына $x=\frac{a^2}{c}$ тигезләмәсе белән бирелгән директриса туры килә.

2. Координаталар системасында $px+qy+r=0$ тигезләмәсе белән бирелгән (биредә $p^2+q^2\neq 0$) теләсә нинди турыны тикшерик. Мәсәлән, $p\neq 0$ булсын, ди. Туры тигезләмәсеннән x ны y аша белдереп һәм аны (6) тигезләмәсенә куеп, y өчен туры һәм эллипсның барлык уртак нокталарының координаталары канәгатьләндергән квадрат тигезләмә табабыз. Квадрат тигезләмәнең икедән артык чишелеше булмый. Димәк, теләсә нинди турының эллипс белән икедән артык булмаган уртак ноктасы бар.

98 Гипербола

Табигый сорау туа: эллипсның билгеләмәсендә ераклыклар суммасын аларның аермасы модуле белән алмаштырсак, нәрсә чыгар? Гипербола дип аталган сызык чыгар. Шулай итеп, түбәндәге билгеләмәне табабыз.

Билгеләмә

Гипербола дип яссылыкның ике билгеләнгән ноктага кадәрг ераклыклар аермасы модуле даими уңай зурлык булган барлы нокталар күплеге атала.

Билгеләнгән нокталар **гиперболаның фокуслары** дип атала.

$2c$ — фокуслар арасындагы ераклыклар, $2a$ — гипербола ноктасыннан фокусларга кадәрге ераклыклар аермасы модуле булсын. Турыпочмаклы координаталар системасы Oxy ны F_1 һәм F_2 фокусларының координаталары $F_1(-c;\ 0)$ һәм $F_2(c;\ 0)$ булырлык итеп кертик (223 нче рәс. карагыз) һәм бу координаталар системасында гиперболаның тигезләмәсен чыгарыйк. Безнең алда торган мәсьәләне болай әйтергә була: $MF_1 - MF_2$ аермасы яки $2a$ га, яки $-2a$ га, ягъни $MF_1 - MF_2 = \pm 2a$ га тигез булырлык итеп, барлык $M(x;\ y)$ нокталары күплеген табарга.

Өчпочмак тигезлегеннән $|MF_1 - MF_2| \leqslant F_1F_2$ булуы чыга, ягъни $a \leqslant c$. $a = c$ булганда, гипербола F_1F_2 турысының ике нурына үзгәрә, шуңа күрә $a < c$ дип исәпләрбез.

Координаталарда гиперболаның тигезләмәсе $\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a$ рәвешендә була.

Бу тигезлекнең ике кисәген дә андагы тамырларның суммасына тапкырлыйбыз, аннары $\pm 2a$ га бүләбез. Нәтиҗәдә табабыз:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm\frac{2cx}{a},$$

өстәвенә уң якта, беренче тигезләмәдәге кебек, шундый ук тамыр (плюс яки минус) була. Хәзер тамырларның һәрберсен чыгарырга була:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \left|a + \frac{cx}{a}\right|,\ \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \left|a - \frac{cx}{a}\right|. \qquad (7)$$

Бу тигезлекләрнең ике кисәгенең теләсә кайсын квадратка күтәрәбез (бу вакытта артык тамырлар килеп чыкмавын исбатлагыз) һәм аны

$$\frac{a^2-c^2}{a^2}x^2 + y^2 = a^2 - c^2$$

рәвешенә китерәбез.

$a \neq c$ булганлыктан, килеп чыккан тигезлекне

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1$$

рәвешендә күчереп язарга була.

Бу — гиперболаның эзләнелгән тигезләмәсе була да инде. Табылган нәтиҗәне (5) тигезләмәсе белән чагыштырып, бер дә көтелмәгән нәтиҗәгә киләбез: **гиперболаның тигезләмәсе төгәл эллипсныкы кебек икән!** Ләкин җитди аермалыгы шунда: эллипс өчен —

$a > c$, ә гипербола өчен — $a < c$. Бу шартны исәпкә алып, гиперболаның тигезләмәсен болай күчереп язарга була:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (8)$$

биредә $b^2 = c^2 - a^2$.

(8) тигезләмәсе **гиперболаның каноник тигезләмәсе** дип атала. Ул гиперболаның түбәндәге үзлекләрен табарга мөмкинлек бирә.

1. Гиперболаның симметрия үзәге (координаталар башлангычы O) һәм ике үзара перпендикуляр симметрия күчәрләре (Ox һәм Oy күчәрләре) бар. Бу күчәрләр **гипербола күчәрләре** дип атала: фокуслары ятканы **реаль күчәр** дип, ә икенчесе **уйланма күчәр** дип атала; a һәм b зурлыклары **реаль һәм уйланма ярымкүчәрләр** дип атала.

2. $\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geqslant 1$ булганлыктан, гиперболаның уйланма күчәрен үз эченә алган полосада ($|x| < a$) гипербола нокталары юк.

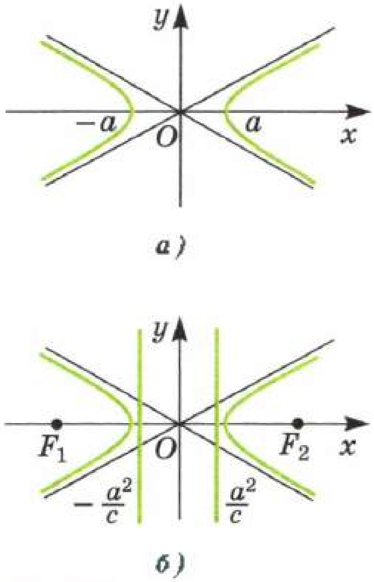
3. $\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 < \frac{x^2}{a^2}$ булганлыктан, ике кисешүче турылар арасында $\left(|y| \geqslant \frac{b}{a}|x|\right)$ гипербола нокталары шулай ук юк.

4. $x \geqslant a$, $y \geqslant 0$ булганда, (8) тигезләмәсен $y = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$ рәвешендә язарга мөмкин.

$y(x)$ функциясе, $x = a$ булганда, $y = 0$ кыйммәтеннән монотон һәм чиксез үсә.

5. $x \to +\infty$ булганда, $y(x)$ функциясе якынча $\frac{b}{a}x$ ка тигез булып бара. Бу үзлекне ачыклыйк. Табабыз: $x \to +\infty$ булганда, $0 < \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a} \cdot \frac{x^2 - x^2 + a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \leqslant \frac{ab}{x} \to 0$. Шулай итеп, гиперболаның асимптотасы $\left(y = \frac{b}{a}x\right)$ була.

Хәзер гиперболаны сурәтлик (рәс. 225, *а*). Аерым очракта гиперболаның ике тармагы булуын күрәбез.



Рәс. 225

Искәрмәләр

1. (7) тигезләмәсен болай язарга була:

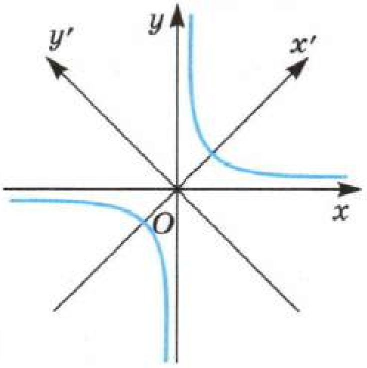
$$\frac{\sqrt{(x+c)^2 + y^2}}{\left|x + \frac{a^2}{c}\right|} = \frac{c}{a}, \quad \frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{\left|x - \frac{a^2}{c}\right|} = \frac{c}{a}.$$

Бу тигезләмәләрнең һәрберсе (8) тигезләмәсенә тигезкөчле (моны исбатлагыз) һәм, димәк, гиперболаның тигезләмәсе була. 97 нче пункттагы 1 нче искәрмәдә үткәрелгәнгә охшаш фикер йөртүләр безне мондый нәтиҗәгә китерә: **яссылыкның билгеләнгән ноктага (фокуска) кадәр ераклыгының билгеләнгән турыга (директрисага) кадәр ераклыгына чагыштырмасы даими һәм бердән зуррак (чөнки гипербола өчен $c > a$) булган нокталарының күплеге гипербола була.**

Күрсәтелгән чагыштырма **гиперболаның эксцентриситеты** дип атала. F_1 фокусына — $x = -\frac{a^2}{c}$ тигезләмәсе белән бирелгән директриса, ә F_2 фокусына $x = \frac{a^2}{c}$ тигезләмәсе белән бирелгән директриса туры килә (рәс. 225, *б*).

2. **Теләсә нинди турының гипербола белән икедән артык булмаган уртак ноктасы булуын** исбатларга авыр түгел (моны үзлегегездән исбатлагыз).

3. Алгебра курсында гипербола дип турыпочмаклы Oxy координаталар системасында $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ тигезләмәсе белән бирелгән кәкре аталган иде. Ox һәм Oy күчәрләрен O ноктасы тирәли сәгать теле йөрешенә каршы 45° ка борып табылган $Ox'y'$ координаталар системасында, $k > 0$ булганда, бу гиперболаның тигезләмәсе (рәс. 226) каноник рәвештә була:



Рәс. 226

$$\frac{x'^2}{(\sqrt{2k})^2} - \frac{y'^2}{(\sqrt{2k})^2} = 1.$$

Моны үзлегегездән исбатлагыз.

99 Парабола

Яссылыкның билгеләнгән ноктага кадәр ераклыгының билгеләнгән турыга кадәр ераклыгына чагыштырмасы даими һәм бердән кимрәк (зуррак) булган барлык нокталарының күплеге эллипс (гипербола) булуын без беләбез.

Үзеннән-үзе мондый сорау туа: нинди кәкре сызык 1 гә тигез булган чагыштырмага туры килә? Бу кәкре сызык парабола дип атала. Шулай итеп, түбәндәге билгеләмәне табабыз.

Билгеләмә

Парабола дип яссылыкның билгеләнгән ноктага кадәр ераклыгы бу нокта аша үтмәүче билгеләнгән турыга кадәр ераклыгына тигез булган барлык нокталар күплеге атала.

Билгеләнгән нокта параболаның **фокусы** дип, ә билгеләнгән туры **директрисасы** дип атала.

p — F фокусыннан директрисага кадәр ераклык, ди. Турыпочмаклы координаталар системасын фокусның координаталары $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ булырлык, ә директриса $x = -\frac{p}{2}$ тигезләмәсе белән бирелерлек итеп кертәбез (рәс. 227, *а*). Бу координаталар системасында параболаның тигезләмәсе

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|$$

рәвешендә була.

Бу тигезлекнең ике кисәген дә квадратка күтәреп (бу вакытта артык тамырлар чыкмавын исбатлагыз),

$$y^2 = 2px \qquad (9)$$

тигезләмәсен табабыз.

Бу тигезләмә **параболаның каноник тигезләмәсе** дип атала. Ул параболаның түбәндәге үзлекләрен табарга мөмкинлек бирә.

1. Параболаның бер симметрия күчәре (Ox күчәре) бар. Бу күчәр **парабола күчәре** дип, ә аның парабола белән кисешү ноктасы **парабола түбәсе** дип атала.

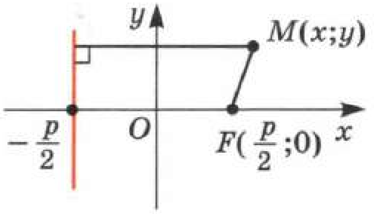
2. $x = \frac{y^2}{2p} \geqslant 0$ булганлыктан, парабола тулаем чиге парабола күчәренә перпендикуляр булган ярымъяссылыкта ($x \geqslant 0$) ята.

3. $x \geqslant 0$ булганда, (9) тигезләмәсе $y = \sqrt{2px}$ рәвешендә язылырга мөмкин.

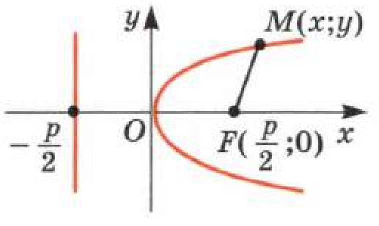
$y(x)$ функциясе монотон һәм, $x = 0$ булганда, $y = 0$ кыйммәтеннән чиксез үсә. Бу, симметрияне исәпкә алып, параболаны сурәтләргә мөмкинлек бирә (рәс. 227, *б*).

Теләсә нинди турының парабола белән икедән артык уртак ноктасы булмавын исбатларга авыр түгел (моны үзлегегездән исбатлагыз).

Эллипс, гипербола һәм парабола күптөрле ситуацияләрдә очрарга мөмкин. Мәсәлән, футбол тубының күләгәсе эллипс белән чикләнгән, ыргытылган таш парабола буенча хәрәкәт итә, ә күк җисемнәренең (планеталарның, кометаларның, метеоритларның һ.б.) хәрәкәте Кояшның тарту тәэсире нәтиҗәсендә эллипс



а)



б)

Рәс. 227

яки гипербола буенча була. Билгеле, күк җисемнәре тәэсирне Кояштан гына түгел, башка җисемнәрдән дә алалар, шуңа күрә аларның чын траекторияләре төгәл эллипсныкы яки гиперболаныкы түгел, әмма бу сызыкларга бик якын торалар. Шулай итеп, Кояш системасының һәр планетасы, шул исәптән безнең Җир дә, эллиптикка якын орбита буенча хәрәкәт итә, өстәвенә Кояш эллипс фокусларының берсендә була.

Мәсьәләләр

863 Эллипсның ике фокусы арасындагы ераклык $4\sqrt{2}$ гә тигез, ә зур һәм кече ярымкүчәрләр чагыштырмасы 3 кә тигез. а) Бу эллипсның Oxy координаталар системасындагы тигезләмәсен языгыз, биредә O — Ox күчәрендә ятучы, фокусларны тоташтыручы кисемтәнең уртасы. б) Эллипсның эксцентриситетын табыгыз. в) Oxy координаталар системасында эллипс директрисаларының тигезләмәсен языгыз.

864 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ эллипсының һәм координаталары $(1; -1)$ һәм $(3; 1)$ булган нокталар аша үтүче турының үзара торышын тикшерегез.

865 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ һәм а) үзәге координаталар башлангычында радиусы $\sqrt{7}$ гә тигез булган әйләнәнең; б) үзәге $(2; 0)$ ноктасында радиусы 2 гә булган әйләнәнең үзара торышын тикшерегез.

866 Гиперболаның асимптоталары координаталар башлангычы аша үтәләр һәм Ox күчәре белән $60°$ лы почмаклар төзиләр. Ox күчәрендә ятучы фокуслар арасындагы ераклык 4 кә тигез. а) Oxy координаталар системасында бу гиперболаның тигезләмәсен языгыз. б) Гиперболаның эксцентриситетын табыгыз. в) Oxy координаталар системасында гиперболаның директрисалары тигезләмәсен языгыз.

867 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ эллипсының һәм $y=\frac{2\sqrt{2}}{x}$ гиперболасының үзара торышын табыгыз.

868 $y=\frac{k}{x}$ $(k>0)$ гиперболасының эксцентриситетын табыгыз һәм директрисасының тигезләмәсен языгыз.

869 Парабола $y=ax^2+by+c$ тигезләмәсе белән бирелгән. Бу параболаның директрисасы тигезләмәсен языгыз һәм аның фокусының координаталарын табыгыз.

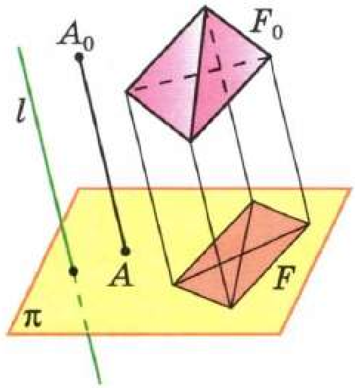
870 $y=x^2$ параболасының һәм радиусы R үзәге $(0; R)$ ноктасында булган әйләнәнең R га бәйле үзара торышын тикшерегез.

1 Пространство фигураларын сурәтләү

Стереометрияне өйрәнгәндә, пространство фигураларын сызымда сурәтләү зур әһәмияткә ия. Без монда сурәтләрне төзүнең кайбер кагыйдәләре белән танышырбыз. Шул максат белән башта фигураның параллель проекциясе төшенчәсен, ә аннары аның ярдәмендә фигураларның сурәтләре төшенчәсен бирербез һәм яссы фигураларны, пространство фигураларын сурәтләүгә мисаллар карарбыз.

1 Фигураның параллель проекциясе

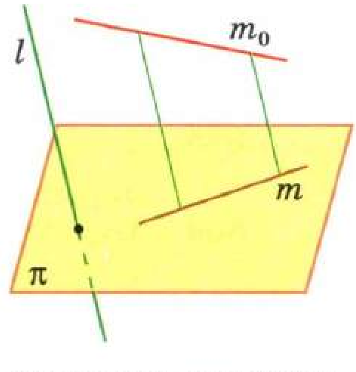
π — ниндидер яссылык, l бу яссылыкны кисүче туры булсын. Пространствода ирекле A_0 ноктасы билгелибез. Әгәр A_0 ноктасы l турысында ятмаса, A_0 ноктасы аша l турысына параллель туры үткәрәбез һәм бу турының π яссылыгы белән кисешү ноктасын A хәрефе белән тамгалыйбыз (рәс. 228). Әгәр дә A_0 ноктасы l турысыныкы булса, l турысының π яссылыгы белән кисешү ноктасын A аша тамгалыйбыз. **A ноктасы π яссылыгына l турысына параллель проекцияләнгәндә A_0 ноктасының проекциясе дип атала.** Гадәттә, π яссылыгы һәм l турысы бирелгән дип исәпләнә, шуңа күрә A ноктасын кыскача A_0 **ноктасының параллель проекциясе** дип атыйлар.



Рәс. 228

F_0 — яссы фигура яки пространство фигурасы, ди. F_0 фигурасының барлык нокталарының параллель проекцияләре π яссылыгында ниндидер F фигурасын барлыкка китерәләр (228 нче рәс. кара). F фигурасы F_0 **фигурасының параллель проекциясе** дип атала. Шулай ук F фигурасы F_0 фигурасыннан **параллель проекцияләү** юлы белән табылган, диләр.

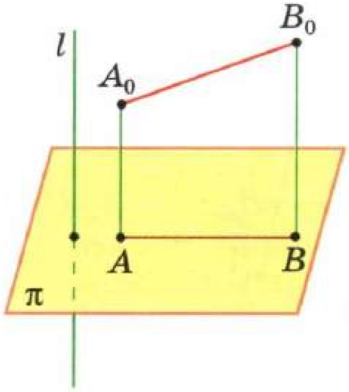
Проекцияләнә торган кисемтәләр һәм турылар l турысына параллель булмаганда, параллель проекцияләүнең төп үзлекләрен бирик.



m турысы m_0 турысының проекциясе була

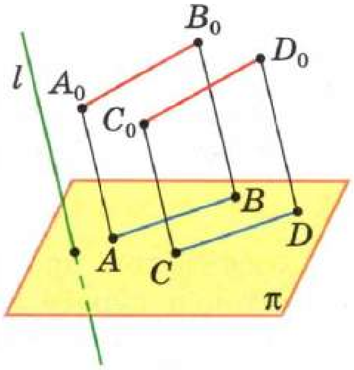
Рәс. 229

1^0. Турының проекциясе туры була (рәс. 229).



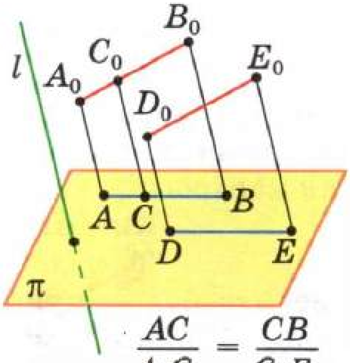
AB кисемтәсе A_0B_0 кисемтәсенең проекциясе була

Рәс. 230



AB һәм CD параллель кисемтәләре A_0B_0 һәм C_0D_0 параллель кисемтәләренең проекциясе була

Рәс. 231



$$\frac{AC}{A_0C_0} = \frac{CB}{C_0B_0}$$

$$\frac{AB}{A_0B_0} = \frac{DE}{D_0E_0}$$

Рәс. 232

2^0. Кисемтәнең проекциясе кисемтә була (рәс. 230).

3^0. Параллель кисемтәләрнең проекцияләре параллель кисемтәләр (рәс. 231) **яки бер турыныкы булган кисемтәләр була.**

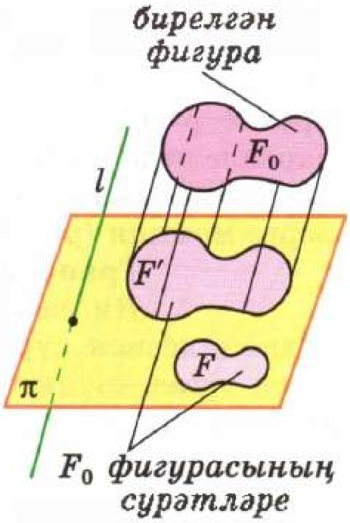
4^0. Параллель кисемтәләрнең проекцияләре, һәм шулай ук бер турыда яткан кисемтәләрнең проекцияләре кисемтәләрнең үзләренә пропорциональ була (рәс. 232).

4^0 үзлегеннән **кисемтә уртасының проекциясе кисемтә проекциясенең уртасы** икәнлеге килеп чыга.

2 Фигураның сурәте

Нинди дә булса π яссылыгы сайлап алабыз да аны **сурәтләү яссылыгы** дип атыйбыз. Аннары π яссылыгын кисүче l турысы алабыз һәм бирелгән F_0 фигурасын, l турысына параллель итеп, π яссылыгына проекциялибез. π яссылыгында килеп чыккан F' фигурасын яки аңа охшаш булган теләсә нинди F фигурасын **F_0 фигурасының сурәте** дип атыйбыз (рәс. 233). Шул рәвешле, фигураның сурәтен төзү аннан ерак урнашкан ноктадан караганда фигураны күзаллауга туры килә.

Төрле сурәтләү яссылыклары һәм төрле проекцияләү юнәлешләре (ягъни төрле l турылары) сайлап алып, бирелгән фигураның төрле сурәтләрен табарбыз. Гадәттә, фигураның иң күрсәтмәле һәм анда өстәмә төзүләр башкару иң уңайлы булган сурәте алына. Сызымда шундый сурәт ясала да.



Рәс. 233

3 Яссы фигураларны сурәтләү

Фигураларның сурәтләрен төзү параллель проекцияләүнең 1 нче пунктта бирелгән үзлекләренә нигезләнгән. Яссы фигураларны сурәтләүгә берничә мисал карарбыз.

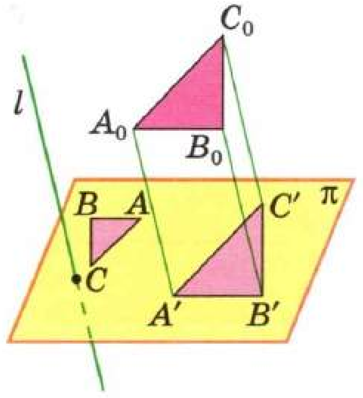
Кисемтә

2^0 үзлеге буенча, кисемтәнең проекциясе кисемтә була, шуңа күрә кисемтәнең сурәте кисемтә була. Моннан **сызымда ирекле рәвештә алынган кисемтәне бирелгән кисемтәнең сурәте** дип исәпләргә мөмкин икәнлеге ачык күренә.

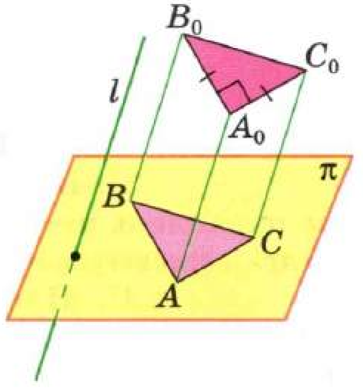
Өчпочмакның, параллелограммның һ.б. ның сурәтләрен караганда, бу фигураларның яссылыклары проекцияләү юнәлешенә (l турысына) параллель түгел дип исәпләрбез.

Өчпочмак

$A_0B_0C_0$ — пространствода урнашкан өчпочмак, A', B' һәм C' исә A_0, B_0 һәм C_0 нокталарының π яссылыгына проекцияләре булсын (рәс. 234, *а*). Кисемтәнең проекциясе кисемтә булганга күрә, $A'B'C'$ өчпочмагы (шулай ук $A'B'C'$ өчпочмагына охшаш теләсә нинди ABC өчпочмагы) $A_0B_0C_0$ өчпочмагының сурәте була. **Бирелгән өчпочмакның сурәте сыйфатында сызымда теләсә нинди өчпочмакны алырга мөмкин.** Мәсәлән, 234, *б* рәсемендә тигезьянлы турыпочмаклы $A_0B_0C_0$ өчпочмагының сурәте булып төрле яклы ABC өчпочмагы хезмәт итә.



а)

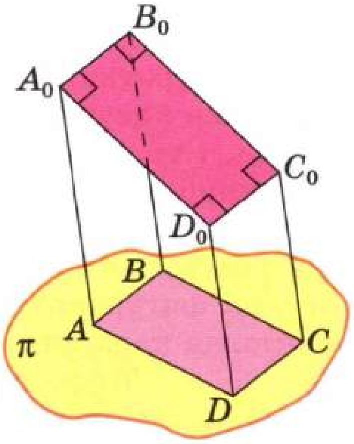


б)

Рәс. 234

Параллелограмм

Тигез параллель кисемтәләрнең проекцияләре тигез параллель кисемтәләр булганга (п. **1**, 3^0 һәм 4^0 үзлекләре), параллелограммның сурәте параллелограмм була. Өчпочмак очрагындагы кебек үк, сызымда ирекле рәвештә алынган параллелограммны бирелгән параллелограммның сурәте дип, аерым алганда, бирелгән турыпочмаклык, ромб, квадратның сурәте дип исәпләргә мөмкин (рәс. 235).



$A_0B_0C_0D_0$ — турыпочмаклык. $ABCD$ — параллелограмм

Рәс. 235

Трапеция

Нигезләре A_0B_0 һәм C_0D_0 булган $A_0B_0C_0D_0$ трапециясенең сурәте $ABCD$ трапециясе икәнен күрү кыен түгел, шуның белән бергә, 1 нче пункттагы 4^0 үзлеге буенча,

$$\frac{AB}{A_0B_0} = \frac{CD}{C_0D_0}, \qquad (1)$$

ягъни трапеция сурәтенең нигезләре трапециянең үзенең нигезләренә пропорциональ. Шуңа күрә теләсә

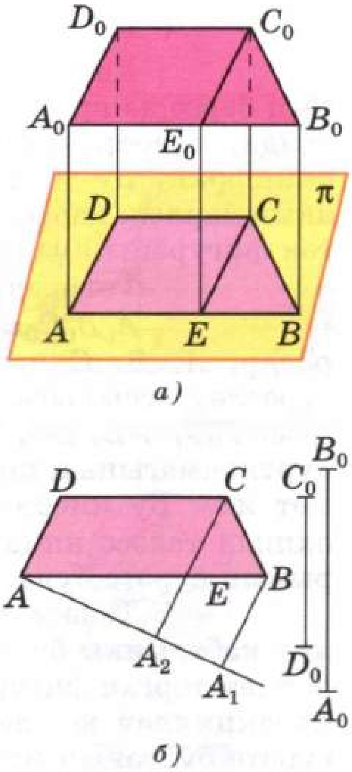
нинди трапецияне бирелгән трапециянең сурәте дип исәпләп булмый. Бирелгән $A_0B_0C_0D_0$ трапециясенең сурәтен төзү ысулын күрсәтербез. Шул максатта A_0D_0 кисемтәсенә параллель һәм трапецияне $A_0D_0C_0E_0$ параллелограммына һәм $B_0C_0E_0$ өчпочмагына бүлә торган C_0E_0 ярдәмче кисемтәсен тикшерербез (рәс. 236, *а*). $A_0D_0C_0E_0$ параллелограммының сурәте сыйфатында теләсә нинди $ADCE$ параллелограммын алабыз (рәс. 236, *б*). $AE = DC$ булганлыктан, (1) пропорциясен

$$\frac{AB}{A_0B_0} = \frac{AE}{C_0D_0} \qquad (2)$$

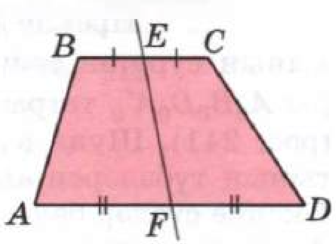
рәвешендә язарга мөмкин.

Хәзер (2) пропорциясеннән файдаланып, B_0 ноктасының сурәтен — B ноктасын җиңел төзеп була. Бу төзү 236, *б* рәсемендә башкарылган, анда $AA_2 = C_0D_0$, $AA_1 = A_0B_0$. Төзелгән $ABCD$ трапециясе $A_0B_0C_0D_0$ трапециясенең сурәте була (аның өчен (1) пропорциясе үтәлгән).

Тигезьянлы $A_0B_0C_0D_0$ трапециясенең сурәте тигезьянлы булмаган $ABCD$ трапециясе дә булуы мөмкин икәнен искәртеп китәбез. Бу вакытта AD һәм BC нигезләренең уртасы аша үтүче EF турысы тигезьянлы трапециянең симметрия күчәре сурәте була, һәм, шулай булгач, EF кисемтәсе тигезьянлы трапеция биеклегенең сурәте була (рәс. 237).



Рәс. 236



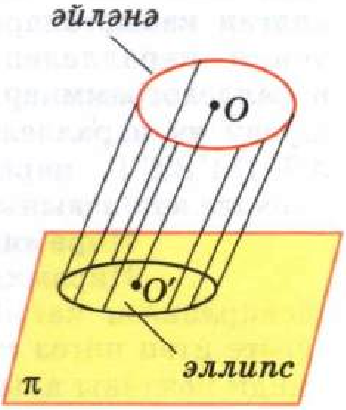
Рәс. 237

Әйләнә

Әйләнәнең параллель проекциясе **эллипс** дип атала (рәс. 238). Әйләнә эллипсның аерым очрагы булып тора, чөнки аның әйләнә яссылыгына параллель яссылыкка проекциясе бирелгәнгә тигез әйләнә була (ни өчен икәнен аңлатып бирегез). Параллель проекцияләрнең үзлекләреннән бирелгән әйләнәнең үзәге O ның проекциясе эллипсның симметрия үзәге булуы килеп чыга (238 нче рәсемдә O' ноктасы). Бу ноктаны **эллипсның үзәге** дип атыйлар.

Шул рәвешле, әйләнәнең сурәте эллипс була, шуның белән бергә, әйләнә үзәгенең сурәте эллипсның үзәге була.

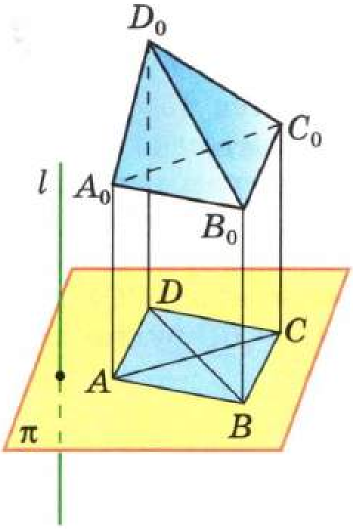
Яссылыкта цилиндрларны, конус, кисек конус һәм сфераларны сурәтләгәндә, эллипстан файдаланалар (VI һәм VII бүлекләрне кара). Табигать белеменнән төрле мәсьәләләр чишкәндә дә, эллипс еш очрый. Мәсәлән, планеталар Кояш тирәли эллипска якын орбита буйлап хәрәкәт итәләр.



Рәс. 238

4 Пространство фигураларын сурәтләү

Хәзер, күпкырлык кырлары яссылыкларының берсе дә проекцияләү юнәлешенә параллель булмаганда, кайбер күпкырлыкларның яссылыкка сурәтен тикшерик. Бу вакытта без күпкырлыкның сурәте дип аның барлык кабыргаларының проекцияләреннән төзелгән фигураны күз алдында тотарбыз.

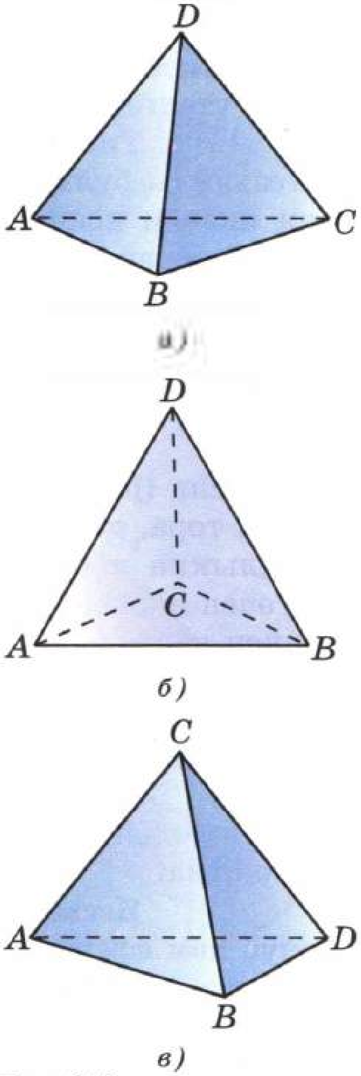


Рәс. 239

Тетраэдр

$A_0B_0C_0D_0$ — ирекле рәвештә алынган тетраэдр, A, B, C һәм D ноктлары аның түбәләренең сурәтләү яссылыгына параллель проекцияләре булсын (рәс. 239). AB, BC, CA, AD, BD, CD кисемтәләре $ABCD$ дүртпочмагының яклары һәм диагональләре булып хезмәт итә. Бу кисемтәләрдән төзелгән фигура (яки аңа охшаш теләсә нинди башка фигура) $A_0B_0C_0D_0$ тетраэдрының сурәте була.

Теләсә нинди дүртпочмакның (кабарынкы яки кабарынкы булмаган) якларыннан һәм диагональләреннән торган фигура, тиешле сурәтләү яссылыгын һәм проекцияләү юнәлешен сайлап алганда, тетраэдрның сурәте булганын исбатларга мөмкин (рәс. 240, *а*, *б*, *в*). (Бу рәсемнәрдә күренми торган кабыргалар өзек сызыклар белән сурәтләнгән.)



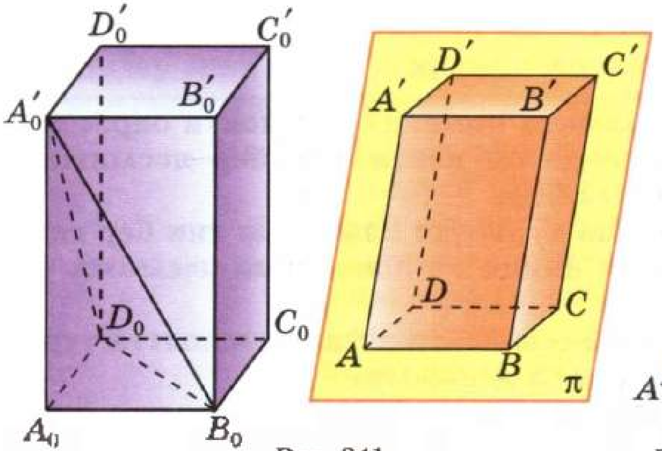
Рәс. 240

Параллелепипед

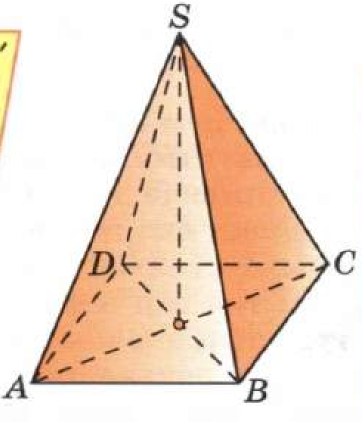
Ирекле $A_0B_0C_0D_0A'_0B'_0C'_0D'_0$ параллелепипедының сурәтен төзү өчен, A_0, B_0, D_0 һәм A'_0 ноктлары $A_0B_0D_0A'_0$ тетраэдрының түбәләре булуын искәртик (рәс. 241). Шуңа күрә теләсә нинди $ABDA'$ дүртпочмагының түбәләрен аларның сурәте итеп алырга мөмкин. Икенче сүзләр белән әйткәндә, сурәтләү яссылыгындагы A очлары уртак булган AB, AD һәм AA' кисемтәләренең һәр икесе бер турыда ятмаса, аларны параллелепипедның A_0B_0, A_0D_0 һәм $A_0A'_0$ кабыргаларының сурәтләре дип исәпләргә мөмкин. Ләкин ул вакытта калган кабыргаларның да сурәтләре бертөрле төзелә, чөнки параллелепипедның барлык кырлары да — параллелограммнар, шулай булгач, аларның сурәтләре шулай ук параллелограммнар булыр. 241 нче рәсемдә $ABCDA'B'C'D'$ параллелепипеды $A_0B_0C_0D_0A'_0B'_0C'_0D'_0$ параллелепипедының сурәте була.

Пирамида

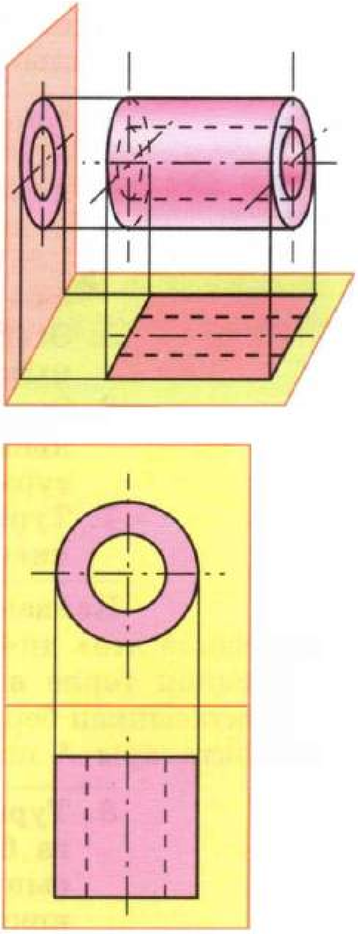
Пирамида нигезенең сурәте 3 нче пунктта тасвирланган кагыйдәләр буенча төзелә, ә түбәсенең сурәте итеп нигез сурәтенең якларында ятмаган теләсә нинди ноктаны алырга була. 242 нче рәсемдә $A_0B_0C_0D_0$ квадраты нигезе булган төзек $S_0A_0B_0C_0D_0$ пирамидасы-



Рәс. 241



Рәс. 242



Рәс. 243

ның сурәте бирелгән. $ABCD$ параллелограммы нигезнең сурәте була.

Искәрмә

Турыпочмаклы проекция параллель проекциянең аерым очрагы (21 нче п. ны кара). Турыпочмаклы проекцияләр техник сызымда киң кулланыла. Гадәттә, нинди дә булса деталь ике яссылыкка — горизонталь һәм вертикаль яссылыкка проекцияләнә, һәм ике проекция дә сызым яссылыгында сурәтләнә. 243 нче рәсемдә цилиндрик втулканың ике проекциясе сурәтләнгән.

2 Геометрия аксиомалары турында

Геометрия аксиомалары башлангыч төшенчәләрнең төп үзлекләреннән тора, аннары аларга нигезләнеп бөтен геометрия төзелә, ягъни логик фикер йөртү юлы белән геометрик фигураларның үзлекләре ачыклана. Аксиомаларда **төп геометрик төшенчәләрнең** үзлекләре аңлатылган. Безнең курста шундыйларга **нокта**, **туры** һәм **яссылык** төшенчәләре, туры ноктасы өчен **«арасында яту»** төшенчәсе һәм **салып карау** төшенчәсе керә. Моннан тыш, геометрия аксиомаларында һәм алардан чыгучы расламаларда «нәрсәнекедер булу» (яки «... да яту»), «күплек», «сан» һ. б. кебек гомуми математик төшенчәләр дә файдаланыла.

Монда без кереш сүздә әйтеп бирелгән, нокта, туры һәм яссылыкның үзара торышы турындагы өч аксиоманы да кертеп, геометриянең барлык аксиомаларын китерербез, шулай ук стереометрия курсында файдаланылган ачык күренеп торган расламаларны аксиомалар нигезендә исбатлауларны бирербез.

Аксиомаларның беренче группасы нокта, туры һәм яссылыкларның үзара торышын чагылдыра.

1. **Һәр турыда һәм һәр яссылыкта кимендә ике нокта бар.**
2. **Бер турыда ятмаган кимендә өч нокта һәм бер яссылыкта ятмаган кимендә дүрт нокта бар.**
3. **Теләсә нинди ике нокта аша туры үтә һәм бары тик бер генә.**
4. **Бер турыда ятмаган теләсә нинди өч нокта аша яссылык үтә һәм бары тик бер генә.**
5. **Әгәр турының ике ноктасы яссылыкта ятса, ул вакытта турының барлык нокталары да шул яссылыкта ята.**
6. **Әгәр ике яссылыкның уртак ноктасы булса, ул вакытта аларның шул яссылыкларда барлык уртак нокталары яткан уртак турысы була.**
7. **Турыдагы өч ноктаның берсе һәм бары тик берсе генә калган икесенең арасында ята.**

Кайвакыт «*B* ноктасы *A* һәм *C* нокталары арасында ята» диясе урынга *A* һәм *C* нокталары *B* ноктасыннан төрле якта яталар яки *A* һәм *B* нокталары *C* ноктасыннан бер якта яталар (аналогик рәвештә *B* һәм *C* нокталары *A* ноктасыннан бер якта яталар), диләр.

8. **Турының һәр *O* ноктасы аны шундый ике кисәккә — ике нурга бүлә, бер үк нурның теләсә нинди ике ноктасы *O* ноктасыннан бер якта ята, ә төрле нурларның теләсә нинди ике ноктасы *O* ноктасыннан төрле якта ята. Шуның белән бергә, *O* ноктасы күрсәтелгән нурларның берсенеке дә түгел.**

A һәм *B* нокталарыннан һәм *AB* турысының алар арасында яткан барлык нокталарыннан торган геометрик фигура *AB* кисемтәсе дип аталуын исегезгә төшерәбез. Әгәр *AB* кисемтәсе һәм *a* турысы бер яссылыкта ятсалар һәм уртак нокталары булмаса, *A* һәм *B* нокталары *a* турысыннан бер якта яталар, диләр; әгәр дә *AB* кисемтәсе *a* турысы белән *A* һәм *B* арасында яткан ниндидер ноктада кисешсәләр, ул вакытта, *A* һәм *B* нокталары *a* турысыннан төрле якта яталар, диләр.

9. **Яссылыкта яткан һәр *a* турысы бу яссылыкны, бер үк ярымъяссылыкның теләсә нинди ике ноктасы *a* турысыннан бер якта, ә төрле ярымъяссылыкларның теләсә нинди ике ноктасы *a* турысыннан төрле якта ята торган булырлык итеп, ике кисәккә (ике ярымъяссылыкка) бүлә. Шуның белән бергә, *a* турысының нокталары бу ярымъяссылыкларның берсенеке дә түгел.**

a турысы һәр ярымъяссылыкның **чиге** дип атала.

Әгәр кисемтәнең бирелгән яссылык белән уртак нокталары булмаса, кисемтәнең очлары яссылыктан

бер якта ята, диләр, әгәр кисемтә яссылык белән үзенең нindидер эчке ноктасында кисешсә, кисемтәнең очлары яссылыктан төрле якта ята, диләр.

10. Һәр α яссылыгы пространствоны, бер үк ярымпространствоның теләсә нинди ике ноктасы α яссылыгыннан бер якта, ә төрле ярымпространстволарның теләсә нинди ике ноктасы α яссылыгыннан төрле якта ята торган булырлык итеп, ике кисәккә (ярымпространствога) бүлә. Шуның белән бергә, α яссылыгының ноктлары күрсәтелгән ярымпространстволарның берсенеке дә түгел.

α яссылыгы һәр ярымпространствоның **чиге** дип атала.

Аксиомаларның киләсе группасы берсен икенчесенә салып карау һәм фигураларның тигезлеге төшенчәләренә керә.

Берсен икенчесенә салу дигәннән, без пространствоны үзенә чагылдыруны аңлыйбыз. Шулай да пространствоның һәр үзенә чагылдыруы берсен икенчесенә салу дип аталмый. **Салып караулар** — пространствоның 11—17 нче аксиомаларында күрсәтелгән үзлекләргә ия булган үзенә чагылдыруы ул. Бу аксиомаларны әйтеп биргәндә, фигураларның тигезлеге төшенчәләре файдаланыла. Ул болай билгеләнә: Ф һәм $Ф_1$ ике фигура булсын, **әгәр Ф фигурасы $Ф_1$ фигурасына чагылдырыла торган салып карау булса, берсен икенчесенә салу юлы белән Ф фигурасын $Ф_1$ фигурасы белән тәңгәл китереп була, яки Ф фигурасы $Ф_1$ фигурасына тигез**, дибез.

11. Әгәр берсен икенчесенә салганда, ике кисемтәнең очлары тәңгәл килсә, кисемтәләр үзләре дә тәңгәл киләләр.

12. Теләсә нинди нурда аның башлангычыннан бирелгән кисемтәгә тигез кисемтә салырга мөмкин һәм бары тик берне генә.

13. Бирелгән яссылыкта теләсә нинди нурдан башлап бирелгән җәелмәгән почмакка тигез почмак салырга мөмкин һәм бары тик берне генә.

14. P һәм P_1 ярымпространстволарының чикләре булган яссылыкларда яткан hk һәм h_1k_1 тигез почмакларын берсен икенчесенә салу юлы белән шулай тәңгәл китерергә мөмкин, бу вакытта P һәм P_1 ярымпространстволары тәңгәл килә, шуның белән бергә, моны ике ысул белән эшләп була: бер очракта — h һәм h_1, k һәм k_1 нурлары, икенче очракта h һәм k_1, k һәм h_1 нурлары тәңгәл килә.

15. Теләсә нинди фигура үз-үзенә тигез.

16. Әгәр Ф фигурасы $Ф_1$ фигурасына тигез булса, $Ф_1$ фигурасы Ф фигурасына тигез була.

17. Әгәр $Ф_1$ фигурасы $Ф_2$ фигурасына тигез, ә $Ф_2$ фигурасы $Ф_3$ фигурасына тигез булса, $Ф_1$ фигурасы $Ф_3$ фигурасына тигез була.

Киләсе ике аксиома кисемтәләрне үлчәүгә бәйле. Аларны әйтеп биргәнгә кадәр кисемтәләрнең ничек үлчәнгәнен искә төшерик. AB — үлчәнә торган кисемтә, PQ кисемтәләрнең сайлап алынган үлчәү берәмлеге булсын. AB нурында $AA_1 = PQ$ кисемтәсен, ә A_1B нурында $A_1A_2 = PQ$ кисемтәсен салабыз һәм, A_n ноктасы B ноктасы белән тәңгәл килгәнче яки B ноктасы A_n белән A_{n+1} арасында калганчы, шулай дәвам итәбез. Беренче очракта, PQ ны үлчәү берәмлеге итеп алганда, AB кисемтәсенең озынлыгы n саны белән аңлатыла (яки PQ кисемтәсе AB кисемтәсендә n тапкыр салына), диләр. Икенче очракта, PQ кисемтәсе үлчәү берәмлеге булганда, AB кисемтәсенең озынлыгы якынча n саны белән аңлатыла дияргә мөмкин. Төгәлрәк үлчәү өчен, PQ кисемтәсен тигез кисәкләргә, гадәттә, 10 тигез кисәккә бүләләр һәм бу кисәкләрнең берсе ярдәмендә тасвирланган ысул белән A_nB калдыгын үлчиләр. Әгәр бу вакытта PQ кисемтәсенең уннан бер кисәге үлчәнә торган калдыкта бөтен сан тапкыр салынып бетмәсә, бу кисәкне тагын ун тигез кисәккә бүлеп, үлчәү процессын дәвам итәләр. Без теләсә нинди кисемтәне шушы ысул белән үлчәргә, ягъни аның озынлыгын бирелгән үлчәү берәмлегендә чикле яки чиксез унарлы вакланма белән күрсәтергә мөмкин дип кабул итәбез. Бу раслау кыскача болай әйтелә:

18. Кисемтәләрнең сайлап алынган берәмлегендә һәр кисемтәнең озынлыгы уңай сан белән күрсәтелә.

Моннан тыш, без бирелгән озынлыктагы кисемтәнең барлыгы турындагы аксиоманы кабул итәрбез.

19. Кисемтәләрне үлчәүнең сайлап алынган берәмлегендә теләсә нинди уңай сан өчен озынлыгы шул сан белән күрсәтелгән кисемтә бар.

Һәм, ниһаять, планиметриядәге кебек үк, стереометриянең соңгы аксиомасы булып параллель турылар аксиомасы тора.

20. Теләсә нинди яссылыкта бу яссылыкта бирелгән турыда ятмаган нокта аша бирелгәнгә параллель бер генә туры үтә.

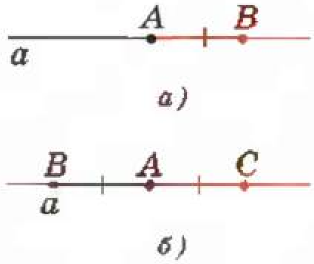
Геометрик фигураларның үзлекләре турында нинди дә булса интуитив күзаллауларны җәлеп итмичә, аксиомаларга таянып, мәсьәләләр чишәргә һәм теоремалар исбат итәргә мөмкин булуы турында без IX класста (Геометрия, 7—9, 1 нче кушымта) сөйләгән идек инде. Мисалга өчпочмаклар тигезлегенең беренче билгесен аңлаткан теореманы аксиомаларга нигезләнеп исбатлау китерелгән иде. Тагын берничә мисал китерербез.

1 нче мәсьәлә

Һәр нурда бер генә булса да нокта барлыгын исбат итәргә.

Чишү

a турысының бер кисәген тәшкил иткән һәм башлангычы *A* ноктасында булган нурны тикшерик. *a* турысында *A* ноктасыннан үзгә бер генә булса да *B* ноктасы бар (1 нче аксиома). Әгәр *B* ноктасы нурда ятса (рәс. 244, *а*), ул вакытта әлеге нокта барлыгын без исбат итә торган нокта була да инде. Әгәр *B* ноктасы нурның дәвамында ятса (рәс. 244, *б*), ул вакытта болай эшлибез: нурда, башлангычыннан алып, $AC = AB$ кисемтәсе салабыз (12 нче аксиома). Ул вакытта *C* ноктасы нурда ята. Раслама исбатланды.



Рәс. 244

2 нче мәсьәлә

Әгәр *A* ноктасы *a* турысында ятса, *B* ноктасы бу турыда ятмаса, ул вакытта *AB* нурының барлык нокталары чиге *a* булган бер ярымъяссылыкта ята, шуны исбатларга.

Чишү

C — *AB* нурының *B* дан үзгә иректе ноктасы булсын (ә андый нокта бармы? Бу сорауга җавапны мөстәкыйль рәвештә табыгыз). *C* ноктасы *B* ноктасы яткан шул ук чиге *a* булган ярымъяссылыкта ятканын исбатларбыз. *B* һәм *C* нокталары *A* ноктасыннан бер якта ятканга күрә, 7 нче аксиома буенча, *A* ноктасы *BC* кисемтәсендә ятмый. Шуңа күрә, әгәр *B* һәм *C* нокталары чиге *a* булган төрле ярымъяссылыкларда ята дип фараз итсәк, *a* турысы *BC* кисемтәсен *A* дан үзгә *D* ноктасында кискәнлеге килеп чыга. Икенче сүзләр белән әйтсәк, *A* һәм *D* нокталары аша ике туры: *a* һәм *AB* турылары үтәр иде. Ләкин бу 3 нче аксиомага каршы килә. Шулай булгач, безнең фаразыбыз дөрес түгел: *B* һәм *C* нокталары чиге *a* булган бер ярымъяссылыкта ята, шуны исбат итәргә кирәк иде дә.

Геометрияне өйрәнгәндә, без, әлегә кадәр почмаклар турындагы анык күзаллауларга таянып, җәелмәгән почмакның эчке өлкәсе төшенчәсеннән файдаланып килдек. Хәзер бу төшенчәгә билгеләмә бирик.

Ике яссылыкның — *B* ноктасын эченә алган чиге *OA* булган ярымъяссылыкның һәм *A* ноктасын эченә алган чиге *OB* булган ярымъяссылыкның — уртак кисәге җәелмәгән *AOB* почмагының эчке өлкәсе дип атала.

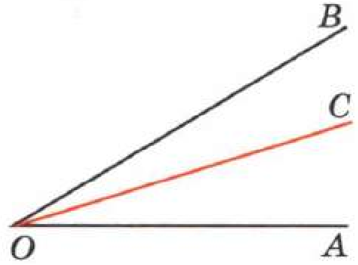
3 нче мәсьәлә

Әгәр нур, җәелмәгән почмакның түбәсеннән чыгып, бу почмакның эчке өлкәсендәге нокта аша үтсә,

нурның барлык нокталары почмакның эчке өлкәсендә ятканын исбатларга.

Чишү

AOB почмагын һәм бу почмакның эчке өлкәсендәге *C* ноктасы аша үтүче *OC* нурын тикшерик (рәс. 245). *C* ноктасы *B* ноктасын эченә алган чиге *OA* булган ярымъяссылыкныкы булганлыктан, *OC* нурының барлык нокталары да шулай ук бу ярымъяссылыкныкы була (2 нче мәсьәләне кара). Шул ук сәбәп буенча *OC* нурының барлык нокталары *A* ноктасын эченә алган чиге *OB* булган ярымъяссылыкныкы була. Шулай булгач, *OC* нурының барлык нокталары күрсәтелгән ярымъяссылыкларның уртак кисәгенеке, ягъни *AOB* почмагының эчке өлкәсенеке була. Раслама исбатланды.



Рәс. 245

4 нче мәсьәлә

Әгәр туры *ABC* өчпочмагының *AB* ягын киссә һәм бу өчпочмакның түбәсе аша үтмәсә, аның я *BC* ягын, я *AC* ягын кискәнен исбатларга.

Чишү

Бирелгән туры яссылыкны ике ярымъяссылыкка бүлә (9 нчы аксиома), өстәвенә *A* һәм *B* нокталары төрле ярымъяссылыкларда яталар. Шуңа күрә әгәр *C* ноктасы *A* ноктасы белән бер ярымъяссылыкта ятса, ул вакытта *B* һәм *C* нокталары төрле ярымъяссылыкларда яталар, димәк, бирелгән туры *BC* кисемтәсен кисеп үтә. Ә инде *C* ноктасы *B* ноктасы белән бер ярымъяссылыкта ятса, ул вакытта *A* һәм *C* нокталары төрле ярымъяссылыкларда яталар, димәк, бирелгән туры *AC* кисемтәсен кисеп үтә. Раслама исбатланды.

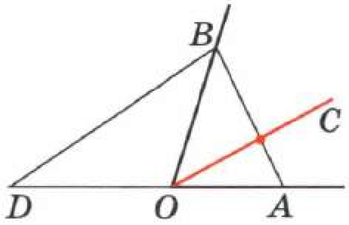
5 нче мәсьәлә

Әгәр нур, җәелмәгән почмакның түбәсеннән чыгып, бу почмакның эчке өлкәсендәге нокта аша үтсә, ул вакытта аның бу почмакны ике почмакка бүлгәнен исбатларга.

Чишү

Эчке өлкәсенең *C* ноктасы аша *OC* нуры үткәрелгән *AOB* почмагын тикшерик (рәс. 246). *AOC* һәм *BOC* почмакларының эчке өлкәләре *OC* турысының төрле ягында ятканын исбатларбыз.

D — башлангычы *O* ноктасында һәм *OA* нурының дәвамы булган нурда ирекле рәвештә алынган нокта булсын. *A*, *B* һәм *D* нокталары *OC* турысында ятмыйлар, һәм бу туры *ABD* өчпочмагының *AD* ягын кисеп үтә. Шулай булгач, ул я *AB* ягын кисә, я *BD* ягын кисә (4 нче мәсьәләне кара). Ләкин *D* ноктасы *AOB* почмагының эчке өлкәсендә ятмый, ул *A* ноктасын



Рәс. 246

эченә алмаган OB чикле ярымъяссылыкта ята. Шуңа күрә BD нурының барлык нокталары AOB почмагының эчке өлкәсенеке түгел (2 нче мәсьәләне кара), димәк, OC нурының BD нурын кисеп үтүе мөмкин түгел, бу нурның барлык нокталары AOB почмагының эчке нокталары була (3 нче мәсьәләне кара). Шулай булгач, ул AB ягын кисә. Бу исә A һәм B нокталарының, димәк, OA һәм OB нурларының да (2 нче мәсьәләне кара), OC турысының төрле ягында ятканын белдерә. Ләкин ул вакытта AOC һәм BOC почмакларының эчке өлкәләре дә OC нурының төрле ягында яталар. Раслама исбатланды.

Кереш сүздә билгеләп үтелгәнчә, геометрия аксиомаларыннан планиметрия курсыннан таныш булган өчпочмакларның тигезлеге һәм охшашлыгы билгеләре төрле яссылыкларда урнашкан өчпочмаклар өчен дә дөрес икәнлеге килеп чыга. Мәсәлән, **өчпочмаклар тигезлегенең беренче билгесен** исбатлыйк.

Теорема

Әгәр бер өчпочмакның ике ягы һәм алар арасындагы почмагы икенче өчпочмакның ике ягына һәм алар арасындагы почмагына тиңдәшле рәвештә тигез булса, андый өчпочмаклар тигез була.

Исбатлау

ABC өчпочмагы — α яссылыгында, ә $A_1B_1C_1$ өчпочмагы α_1 яссылыгында урнашкан һәм $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$ булсын. Стереометриядә өчпочмак дигәннән, гадәттә, өч якны гына түгел, бәлки аның тиңдәшле эчке өлкәсен дә эченә алган фигураның исәпкә алынуын күз алдында тотып, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ икәнен исбатлыйк. AB нуры — A_1B_1 нуры белән, ә AC нуры A_1C_1 нуры белән тәңгәл килерлек итеп, A почмагы A_1 почмагы белән тәңгәл китерелә торган салып карауны тикшерик. 14 нче аксиома нигезендә, андый салып карау бар. 12 нче аксиома буенча, A_1B_1 нурында аның башыннан AB нурына тигез бер генә кисемтә салып булганга, B ноктасы B_1 ноктасы белән тәңгәл килер. Аналогия буенча, C ноктасы C_1 ноктасы белән тәңгәл килер. Шулай булгач, 11 нче аксиома буенча, AB һәм A_1B_1, AC һәм A_1C_1, BC һәм B_1C_1 кисемтәләре тәңгәл килер, ягъни ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмакларының яклары тәңгәл килер.

Хәзер күрсәтелгән салып карауда ABC өчпочмагының эчке өлкәсе $A_1B_1C_1$ өчпочмагының эчке өлкәсе белән тәңгәл китерелгәнен исбат итәрбез. Моның өчен ABC өчпочмагының эчке өлкәсендәге теләсә нинди ноктасы $A_1B_1C_1$ өчпочмагы эчке өлкәсенең кайсыдыр

ноктасы белән тәңгәл килгәнен һәм киресенчә: $A_1B_1C_1$ өчпочмагы эчке өлкәсенең теләсә нинди ноктасына ABC өчпочмагы эчке өлкәсенең кайсыдыр ноктасы салынганын исбатларга кирәк. M — ABC өчпочмагы эчке өлкәсенең ирекле рәвештә алынган ноктасы булсын. M ноктасы аша очлары ABC өчпочмагының AB һәм AC якларында булган нинди дә булса PQ кисемтәсе үткәрик. AB ягы A_1B_1 ягы белән тәңгәл килгәнгә күрә, P ноктасы A_1B_1 ягындагы ниндидер P_1 ноктасы белән тәңгәл килер. Шулай ук Q ноктасы A_1C_1 ягындагы ниндидер Q_1 ноктасы белән тәңгәл килер. Шуңа күрә, 11 нче аксиома буенча, PQ кисемтәсе P_1Q_1 кисемтәсе белән тәңгәл килер, димәк, PQ кисемтәсенең M ноктасы P_1Q_1 кисемтәсенең ниндидер M_1 ноктасы белән тәңгәл килер, ягъни $A_1B_1C_1$ өчпочмагы эчке өлкәсенең M_1 ноктасына салыныр. Шулай ук киресен дә исбатларга мөмкин: $A_1B_1C_1$ өчпочмагы эчке өлкәсенең теләсә нинди ноктасына ABC өчпочмагы эчке өлкәсенең ниндидер ноктасы салыныр. Шулай итеп, әле күрсәтелгән берсен икенчесенә салуда ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмаклары тулысынча тәңгәл киләләр, ягъни алар тигез. Теорема исбатланды.

6 нчы мәсьәлә

Әгәр бер өчпочмаклы туры призманың нигезе һәм биеклеге икенче өчпочмаклы туры призманың нигезе һәм биеклегенә тигез булса, андый призмаларның тигез икәнен исбат итәргә.

Чишү

$ABCDEF$ һәм $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ туры призмаларының ABC һәм $A_1B_1C_1$ нигезләре тигез, AD һәм A_1D_1 биеклекләре тигез булсын, шуның белән бергә, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ һәм $\angle A = \angle A_1$. ABC яссылыгы чиге булган, D, E һәм F нокталарын эченә алган ярымпространствоны — H хәрефе белән, ә $A_1B_1C_1$ яссылыгы чиге булган, D_1, E_1 һәм F_1 нокталарын эченә алган ярымпространствоны H_1 хәрефе белән тамгалыйк.

A почмагы A_1 почмагы белән тәңгәл китерелгәндә, AB нуры — A_1B_1 нуры белән, AC нуры A_1C_1 нуры белән тәңгәл килә, ә H ярымпространствосы H_1 ярымпространствосы белән тәңгәл килә торган берсен икенчесенә салуны тикшерик. 14 нче аксиома нигезендә, андый берсен икенчесенә салу бар. Мондый берсен икенчесенә салу вакытында, ABC өчпочмагы (ягъни аның яклары һәм эчке өлкәсе) аңа тигез булган $A_1B_1C_1$ өчпочмагы белән тәңгәл килә. Аннары AD нуры H_1 ярымпространствосында урнашкан ниндидер A_1D_2 нуры белән тәңгәл килер, шуңа күрә DAB һәм DAC почмак-

лары тиңдәшле рәвештә $D_2A_1B_1$ һәм $D_2A_1C_1$ почмаклары белән тәңгәл килерләр. Ләкин DAB һәм DAC туры почмаклар булганга, $D_2A_1B_1$ һәм $D_2A_1C_1$ почмаклары шулай ук туры, димәк, A_1D_2 нуры $A_1B_1C_1$ яссылыгына перпендикуляр, шулай булгач, A_1D_1 нуры белән тәңгәл килә. Шулай итеп, күрсәтелгән салып карауда AD нуры A_1D_1 нуры белән тәңгәл килә, ә $AD = A_1D_1$ булганлыктан, D ноктасы D_1 ноктасы белән тәңгәл килә. Шул ук сәбәп буенча E һәм F нокталары тиңдәшле рәвештә E_1 һәм F_1 нокталары белән тәңгәл килерләр. Димәк, бер призманың DEF нигезе һәм ян кабыргалары икенче призманың тиңдәшле рәвештә $D_1E_1F_1$ нигезе һәм ян кабыргалары белән тәңгәл килерләр. Хәзер инде тиңдәшле ян кырларның һәм шулай ук призманың эчке нокталары да тәңгәл килгәнен исбат итү кыен түгел. Моны, өчпочмаклар тигезлегенең беренче билгесен исбатлаганда, ABC һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмакларының эчке өлкәләренең тәңгәл килүен исбатлаган кебек үк эшләргә мөмкин. Шулай итеп, $ABCDEF$ һәм $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ призмалары тулысынча тәңгәл килерләр, ягъни алар тигез.

Тиңдәшле рәвештә үлчәнешләре тигез булган ике турыпочмаклы параллелепипедның тигезлеген һәм нигезләре һәм биеклекләре тигез булган ике төзек пирамиданың тигезлеген шулай ук исбатларга мөмкин.

IX класста (Геометрия, 7—9, 1 нче кушымта) без кабул иткән кайбер аксиомаларны башка аксиомалар нигезендә исбат итәргә мөмкин булуы, ягъни чынлыкта аларның аксиома түгел, ә бәлки теоремалар икәнлеге турында әйткән идек. Мәсәлән, 5, 8 нче һәм 10 нчы аксиомаларының раслаулары теоремалар була. Моны мөстәкыйль рәвештә исбатлагыз.

Әгәр аксиомалар санын минимумга калдырырга омтылсак, 17 нче аксиоманы башкача әйтергә кирәк:

Әгәр Φ_1 фигурасы Φ_3 фигурасына тигез, ә Φ_2 фигурасы Φ_3 фигурасына тигез булса, ул вакытта Φ_1 фигурасы Φ_2 фигурасына тигез була.

Аксиоманы болай тәгъбир иткәндә, 16 нчы аксиоманы кулланмаска мөмкин — ул теоремага әверелә. Дөрестән дә, Φ фигурасы Φ_1 фигурасына тигез булсын, ди, һәм ул вакытта Φ_1 фигурасы Φ фигурасына тигез икәнен исбат итәрбез. $\Phi_1 = \Phi_1$ икәне билгеле (15 нче аксиома), $\Phi = \Phi_1$ — шарт буенча. Димәк, $\Phi_1 = \Phi$, шуны исбат итәргә кирәк иде дә.

Шулай итеп, геометрия курсын төзү өчен, 20 аксиома түгел, ә 16 аксиоманы әйтеп бирү дә җиткән булыр иде.

Җаваплар һәм күрсәтмәләр

Кереш

3. а) Әйе; б) юк; в) юк; г) юк. **5.** Чиксез күплек. **7.** Юк. Күрсәтмә. A_2 аксиомасыннан файдаланырга. **8.** а) Юк; б) әйе. **9.** Әйе. **10.** а) Әйе; б) юк. **12.** Әйе. **13.** а) Юк; б) юк; в) әйе. **14.** Турылар бер яссылыкта ятмаса — өч яссылык һәм турылар бер яссылыкта ятса — бер яссылык.

I бүлек

17. 26 см. **18.** а) 3,5 см; б) 12 см. **20.** Юк. **27.** 48 см. **28.** $8\frac{1}{3}$ см. **29.** 6 см. **33.** Күрсәтмә. α, β һәм γ — бирелгән яссылыклар, ә a — α һәм β яссылыкларының кисешү сызыгы булсын. a турысы белән γ яссылыгының үзара торышын тикшерергә. **34.** а), б) Кисешәләр; в), г) параллельләр; д), е) чалышма. **37.** а) Кисешәләр; б) чалышма. **40.** а) Юк; б) әйе, MN турысы. **41.** Юк. **42.** а) Параллельләр; б) 100 см. **44.** а) 40°; б) 45°; в) 90°. **45.** а) 50°; б) 59°. **46.** а) 90°; б) 64°. **49.** Юк. **54.** б) 12 см^2. **56.** Күрсәтмә. 55 нче мәсьәләдән файдаланырга. **57.** Күрсәтмә. 56 нчы мәсьәләдән файдаланырга. **60.** Күрсәтмә. 58 нче мәсьәләдән файдаланырга. **63.** а) $AA_2 = 18$ см, $AB_2 = 15$ см; б) $A_2B_2 = 54$ см, $AA_2 = 72$ см. **65.** а) Параллелограммнар. **66.** Кабыргаларның өч пары. **67.** а) ≈ 17 см, ≈ 23 см, ≈ 29 см; б) ≈ 146 см^2, ≈ 210 см^2, ≈ 180 см^2. **72.** Күрсәтмә. а) Кисүче яссылык тетраэдрның DB һәм DC кабыргаларының уртасы аша үткәнен исәпкә алырга; б) кисүче яссылык тетраэдрның ян кырларын ABC өчпочмагының якларына параллель кисемтәләр буйлап кисқәнен исқә алырга. **73.** 22 см. **74.** б) $\frac{4}{9}$. **75.** б) 6 см^2. **77.** 8 см, 10 см, 12 см. **79.** а) ABC_1D_1 параллелограммы; б) ACC_1A_1 параллелограммы. **81.** а) MN һәм BC турыларының кисешү ноктасы; б) AM һәм A_1B_1 турыларының кисешү ноктасы. **82.** Күрсәтмә. Мәсьәлә 14 нче пунктның 2 нче мәсьәләсе кебек үк чишелә. **83.** Күрсәтмә. Башта кисүче яссылык а) AA_1D_1D; б) $ABCD$ кырын кисеп үткән кисемтәне төзергә кирәк. **84.** Күрсәтмә. Башта $ABCD$ кырын кисүче яссылык кисеп үткән кисемтәне төзергә кирәк. **85.** BKD_1L параллелограммы. **86.** Күрсәтмә. Башта кисүче яссылыкның DD_1 кабыргасы белән кисешү ноктасын төзергә. **87.** Күрсәтмә. Башта кисүче яссылыкның а) BCC_1B_1 кырын; б) AA_1D_1D кырын кисеп үткән кисемтәне төзергә. **88.** б) 12 см. **90.** CD турысы а) α яссылыгына параллель; б) α яссылыгын кисә. **92.** Күрсәтмә. 6 нчы пунктның 2^0 үзлегеннән файдаланырга. **93.** MN һәм b — чалышма турылар. **94.** Әйе. **95.** Күрсәтмә. 55 нче мәсьәләдән файдаланырга. **98.** Бер генә яссылык бар. **100.** Күрсәтмә. 7 нче пунктның икенче теоремасыннан һәм 59 нчы мәсьәләдән файдаланырга. **102.** $10(2\sqrt{3}+1)$ см һәм $25\sqrt{11}$ см^2. **103.** $4\frac{4}{9}$ см^2. **108.** Күрсәтмә. Алдан ADA_1, BDB_1 һәм CDC_1 яссылыкларының туры

буйлап кисешкәнен исбатларга. **112.** Күрсәтмә. Параллелограммның диагональләренең квадратлары суммасы аның якларының квадратлары суммасына тигез булуын искә алырга. **113.** BD_1 турысы.

II бүлек

118. $\angle AOB$, $\angle MOC$ һәм $\angle DOA$. **120.** $\frac{\sqrt{4b^2+2a^2}}{2}$. **121.** 13 см. **122.** $KA = KB = 20$ см, $DA = DB = 32$ см. **125.** 9 см. **126.** Турыпочмаклы. **130.** а) $MA = \sqrt{m^2+n^2}$; $MB = m$, $MC = \sqrt{m^2+n^2}$, $MD = \sqrt{m^2+2n^2}$; б) $\sqrt{m^2+\frac{1}{2}n^2}$, m. **136.** Күрсәтмә. 134 нче мәсьәләдән файдаланырга. **138.** а) $\frac{d}{\cos\varphi}$, $d\,\mathrm{tg}\,\varphi$; б) $m\cos\varphi$, $m\sin\varphi$. **140.** 3 см. **141.** 3 см. **142.** 2,5 см яки 1,5 см. **143.** 2 см. **145.** б) $\sqrt{a^2+b^2}$. **146.** Күрсәтмә. Өч перпендикуляр турындагы теоремадан һәм аңа кире теоремадан файдаланырга. **149.** 4 см һәм $4\sqrt{10}$ см. **150.** а) 2 см; б) $4\sqrt{2}$ см. **152.** 8 дм, 8 дм, $4\sqrt{5}$ дм, $4\sqrt{5}$ дм, 8 дм, $6\sqrt{2}$ дм. **154.** а) 15 см; б) 75 $см^2$. **155.** 6 см. **156.** $\sqrt{n^2+m^2\sin^2\varphi}$. **157.** б) 5,1 дм. **158.** 12,5 см, 12,5 см, 25 см, 25 см. **160.** 12 см. **161.** Күрсәтмә. A ноктасыннан BC һәм BD турыларына һәм CBD яссылыгына үткәрелгән перпендикулярларны файдаланырга. **163.** а) $\frac{d\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{d}{2}$; в) $\frac{d\sqrt{3}}{2}$. **164.** 60°. **165.** $3d$. **168.** $\frac{d}{\sin\varphi}$. **170.** 1 см һәм $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см. **171.** 45°. **172.** $6\sqrt{3}$ см. **173.** 90°, 45° һәм 60°. **174.** 60°. **175.** $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, $\alpha \approx 70°32'$. **176.** $8\sqrt{2}$. **179.** Күрсәтмә. 178 нче мәсьәләдән файдаланырга. **180.** Күрсәтмә. 179 нчы мәсьәләдән файдаланырга. **182.** б) $\sqrt{m^2+n^2}$. **184.** а) $5\sqrt{6}$ см; б) $5\sqrt{2}$ см. **187.** а) $\sqrt{6}$; б) 17; в) 13. **188.** $a\sqrt{3}$. **189.** а) $\frac{m\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{d\sqrt{3}}{3}$. **190.** а) 90°; б) 45°; в) $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{1}{2}$, $\varphi \approx 26°34'$. **192.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **193.** а) $\sqrt{d^2-m^2}$; б) $\sqrt{m^2-n^2}$; в) $\frac{n\sqrt{m^2-n^2}}{m}$. **194.** а) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. **195.** 6 см, 6 см һәм $6\sqrt{2}$ см. **198.** 4 см. **199.** Күрсәтмә. O ноктасы S ноктасының өчпочмак яссылыгына проекциясе булсын. O ноктасының M ноктасы белән тәңгәл килгәнен исбатларга. **201.** 90°. **202.** $5\sqrt{3}$ см. Күрсәтмә. 199 нчы мәсьәләдән файдаланырга. **203.** 5 см. **204.** а) $\frac{a}{\sin\varphi}$, $\frac{a}{2\,\mathrm{tg}\,\varphi}\sqrt{1+4\,\mathrm{tg}^2\varphi}$; б) $\frac{2\pi a}{\mathrm{tg}\,\varphi}$; в) $\frac{3\sqrt{3}\,a^2}{4\,\mathrm{tg}^2\varphi}$. **205.** 3,5 $дм^2$. **206.** 25 см. **207.** 8 см. **208.** $9\sqrt{6}$ см. **209.** B ноктасыннан α яссылыгына кадәрге ераклык C ноктасыннан бу яссылыкка кадәрге ераклыктан кечерәк. **211.** $a\sqrt{2}$. **213.** $\cos\varphi = \frac{1}{3}$; $\varphi \approx 70°33'$. **214.** 60°. **215.** $\frac{1}{2}\sqrt{217}$ см. **216.** $2a$. **217.** $2\sqrt{122}$ дм.

III бүлек

219. 13 см. **220.** 26 см. **221.** $8\sqrt{21}$ см^2. **222.** 45°, 135°, 45°, 135°. **223.** 8 см һәм $8\sqrt{3}$ см. **224.** $16\sqrt{7}$ см^2. **225.** 45°. **226.** $2\sqrt{3}$ см^2. **228.** $80\sqrt{2}$ см^2. **229.** а) 450 см^2 һәм ≈ 536 см^2; б) 384 дм^2 һәм 672 дм^2; в) 69 дм^2 һәм ≈ 97 дм^2; г) 0,2 м^2 һәм $\approx 0{,}8$ м^2. **230.** 75 см^2. **231.** $20(23+6\sqrt{3})$ см^2. **232.** $2d^2 \sin\varphi\,(\sqrt{\cos^2\varphi - \sin^2\alpha} + \sin\alpha)$. **233.** 180 см^2. **234.** 580 см^2. **235.** $\dfrac{2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sin\theta}{\sin\frac{\varphi}{2}}$. **236.** Күрсәтмә. Авыш призманың ян кырлары параллелограммнар икәнен искә алырга. **237.** 240 см^2. Күрсәтмә. 236 нчы мәсьәләдән файдаланырга. **238.** 2016 см^2. **239.** $\sqrt{58}$ см, $\sqrt{58}$ см, $\sqrt{65}$ см, $\sqrt{65}$ см. **240.** 768 см^2. **241.** $(2\sqrt{34}+22)$ м^2. **242.** а) $4\sqrt{3}$ см; б) $48(\sqrt{2}+1)$ см^2. **243.** 192 см^2. **244.** 790 см^2. **245.** $8(3+3\sqrt{3}+\sqrt{6})$ см^2. **246.** б) 189 см^2. **248.** $48\sqrt{2}$ см^2. **250.** $64\sqrt{3}$ см^2. **251.** 13 см. **252.** 12 см. **253.** 12 см. **254.** а) $\dfrac{\sqrt{9H^2+3a^2}}{3}$; б) $2\arcsin\dfrac{3a}{2\sqrt{9H^2+3a^2}}$; в) $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}H}{a}$; г) $\operatorname{arctg}\dfrac{2\sqrt{3}H}{a}$; д) $2\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3H^2+a^2}}{3H}$. **255.** $\dfrac{4}{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}\sqrt{1-\dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^2\dfrac{\varphi}{2}}$. **256.** а) $\dfrac{m\cos\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$; б) $\dfrac{m}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$; в) $\arccos\left(\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\right)$; г) $2\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\right)$. **257.** $3\sqrt{3}(1+\sqrt{2})h^2$. **258.** $72(1+\sqrt{7})$ см^2. **259.** $3\sqrt{5}$ см. **263.** а) Трапеция. **264.** $3a^2$. **265.** 54 см^2. **266.** 13 дм^2. **268.** $\sqrt{7}$ дм. **269.** $\frac{2}{3}\sqrt{6}$ дм, $\sqrt{3}$ дм. **270.** 16 см^2. **276.** а) Бер; б) юк; в) юк; г) бер. **277.** а) Чиксез күп; б) өч; в) тугыз. **278.** а) Биш; б) дүрт; в) өч яки алты. **279.** 60°. **280.** Чиктәш кырларының диагональләре аша үтүче кисем мәйданы $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$ гә тигез. Капма-каршы кырларының диагональләре аша үтүче кисем мәйданы $a^2\sqrt{2}$. **281.** $\sqrt{3}$. **282.** 90°. **283.** а) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$; б) $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}$. **284.** Төзек октаэдр. **286.** а) $m=\dfrac{\sqrt{6}}{2}h$; б) $n=\dfrac{1}{3}m$. **287.** а) $a\sqrt{2}$; б) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}a$; в) $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **290.** $2\sqrt{2}\,l^2\dfrac{\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\theta}\sqrt{\sin(\theta+\varphi)\sin(\theta-\varphi)}$. **291.** $2d^2\sin\varphi \times$ $\times(\cos\theta+\sqrt{\sin(\theta+\varphi)\sin(\theta-\varphi)})$. **292.** 4,8 см. **294.** $4\sqrt{S_0^2-a^4}$ яки $2\sqrt{2}\,S_0$. **296.** $\dfrac{\sqrt{3}h^2\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$. Күрсәтмә. Эзләнелә торган кисем трапеция булуын исәпкә алырга. **298.** $2a^2+2a\sqrt{4b^2-a^2}$. **299.** 0,5 m. **300.** Турыпочмаклык, $S=\dfrac{ab}{4}$. **301.** $4\sqrt{6}$ см. **302.** 5 см, 5 см, 6 см, 6 см. **303.** $288(3+\sqrt{3})$ см^2.

305. $2h^2 \operatorname{tg}\alpha$. **306.** $4h^2\operatorname{tg}^2\varphi\left(1+\frac{1}{\sin\varphi}\right)$. **307.** а) $\frac{\sqrt{2}}{4}ab$. **308.** 4 см, 4 см, 4 см, 4 см. **309.** $\frac{80}{3}$ дм^2. **310.** 540 см^2. **311.** а) 315 см^2; б) 7,2 см. **312.** $\operatorname{tg}\varphi\cos\frac{180°}{n}$. **313.** 54 дм^2. **314.** 56 см, 24 см. **319.** Өч.

IV бүлек

320. а) 3 см, 4 см, 5 см, 1,5 см, 2 см, 2,5 см; б) 4 см, 3 см, 5 см, 2 см, 2,5 см. **321.** а) 12 см, 8 см, 9 см; б) 15 см, $\sqrt{145}$ см, 17 см. **323.** а) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$, $\overrightarrow{QM}=\overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{PC}$; б) квадрат. **324.** а) Әйе; б) әйе; в) юк. **325.** а) Параллель яки тәңгәл киләләр; б) туры яссылыкка параллель яки анда ята; в) яссылыклар параллель, кисешәләр яки тәңгәл киләләр. **326.** а) $\overrightarrow{CC_1}$; б) $\overrightarrow{DK}$; в) $\overrightarrow{A_1C_1}$; г) $\overrightarrow{C_1B_1}$; д) $\overrightarrow{MB_1}$. **327.** а) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AC_1}$; в) $\overrightarrow{C_1B}$; г) $\overrightarrow{DB_1}$; д) $\overrightarrow{DC_1}$. **329.** а) $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{A_1D_1}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$; б) $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{DC_1}$; в) $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{B_1A_1}$, $\overrightarrow{C_1D_1}$; г) $\overrightarrow{B_1A_1}$, $\overrightarrow{C_1D_1}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BA}$. **333.** а) $\vec{0}$; б) $\overrightarrow{DB}$. **335.** а) $\overrightarrow{PQ}$; б) $\overrightarrow{AK}$; в) $\overrightarrow{CP}$; г) $\vec{0}$. **336.** а) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BD}$; б) $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{DA}$; в) $-(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC})$. **337.** а) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{OE}$; б) $\overrightarrow{AK}$; в) $\vec{0}$. **338.** *Күрсәтмә.* $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OC_1}$ булуын искә алырга. **339.** а) $\overrightarrow{C_1B}$; б) $\overrightarrow{AC}$. **340.** а) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{BC}$. **344.** а) −1; б) 2; в) $-\frac{1}{2}$. **345.** а) $-2\overrightarrow{EF}$; б) $-\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$. **346.** $-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$. **347.** а) $5\vec{n}-9\vec{m}$; б) $2\vec{p}-13\vec{m}-3\vec{n}$. **355.** а), в). **356.** Әйе. **358.** а) $\overrightarrow{AC_1}$; б) $\overrightarrow{DB_1}$; в) $\overrightarrow{DB_1}$; г) $\overrightarrow{A_1C}$; д) $\overrightarrow{BD_1}$. **359.** а) $\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB_1}$; б) $\overrightarrow{B_1D_1}=\overrightarrow{A_1A}-\overrightarrow{A_1B}+\overrightarrow{A_1D_1}$. **360.** а) $-\frac{kq}{a^3}\overrightarrow{AC_1}$, $\frac{\sqrt{2}\,kq}{2a^3}\overrightarrow{AC_1}$; б) $\frac{kq}{3a^2}\sqrt{19+4\sqrt{3}}$, $\frac{kq}{3a^2}\sqrt{19+4\sqrt{3}}$, $\frac{2kq}{9a^2}\sqrt{105}$, $\frac{4kq}{3a^2}$. **361.** $\overrightarrow{CD}=0\cdot\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB}+0\cdot\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{D_1O}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. **363.** $\overrightarrow{OD}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$, $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\vec{a}+0\cdot\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$. **364.** $\overrightarrow{AK}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$, $|\overrightarrow{AK}|=\frac{3}{2}m$. **365.** $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+0\cdot\vec{c}$, $\frac{3}{4}\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$. **367.** $\overrightarrow{DK}=0{,}7\overrightarrow{DA}+0{,}15\overrightarrow{DB}+0{,}15\overrightarrow{DC}$. **368.** а) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{CM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$; в) $\overrightarrow{C_1N}=-\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$; д) $\overrightarrow{A_1N}=0\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$; ж) $\overrightarrow{MD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$. **369.** $\overrightarrow{OA}=3\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$. **370.** а) $\overrightarrow{DN}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$; б) $\overrightarrow{DK}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$; в) $\overrightarrow{AM}=-\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$; г) $\overrightarrow{MK}=\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{1}{12}\vec{b}-\frac{1}{12}\vec{c}$. **371.** *Күрсәтмә.* 350 нче һәм 366 нчы мәсьәләләрдән файдаланырга. **373.** Юк. *Күрсәтмә.* Башта M_1 — $A_1B_1C_1$ өчпочмагы медианаларының кисешү ноктасы икәнен исбатларга, ә аннары 366 нчы мәсьәләдән файдаланырга. **379.** а) $\overrightarrow{AC}$;

б) $\overrightarrow{AB}$; в) $\vec{0}$. **380.** а) $\overrightarrow{AD_1}$; б) $\overrightarrow{AC_1}$; в) $\overrightarrow{DB}$. **381.** Күрсәтмә. Башта $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{C_1A_1}$ икәнен исбатларга. **382.** а) k — теләсә нинди; б) $k \geqslant 0$; в) $k < 0$; г) $k = -1$. **386.** Күрсәтмә. Башта $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD})$ икәнен исбатларга. **387.** а) $3\overrightarrow{ON} - 2\overrightarrow{OM}$; б) $2\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}$; в) $k\overrightarrow{ON} + (1-k)\cdot\overrightarrow{OM}$. **389.** Башта $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2}$ һәм $\overrightarrow{A_3B_3}$ векторларының компланар икәнен исбатлагыз. **390.** а) $\frac{3}{2a^2}kq$; б) $\frac{\sqrt{143-10\sqrt{10}}}{5\sqrt{5}a^2}kq$; в) $\frac{4}{9a^2}kq$; г) $\frac{4\sqrt{737}}{27a^2}kq$. **391.** $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$. **392.** $\overrightarrow{AC_1} = \vec{p} + \vec{q} + \vec{r}$; $\overrightarrow{CA_1} = -\vec{p} - \vec{q} + \vec{r}$; $\overrightarrow{BD_1} = \vec{q} - \vec{p} + \vec{r}$; $\overrightarrow{DB_1} = -\vec{q} + \vec{p} + \vec{r}$. **393.** а) $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$; б) $\overrightarrow{DA_1} = \overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{CD_1}$. **394.** $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$. **395.** Күрсәтмә. Башта $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ һәм $\overrightarrow{CC_1}$ векторларының компланар икәнен исбатлагыз. **396.** $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{d} - \vec{c}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b} - \vec{d}$, $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{d}$. **397.** $\frac{1}{3}$. **398.** Күрсәтмә. 366 нчы мәсьәләдән файдаланырга. **399.** Күрсәтмә. 397 нче мәсьәләдән файдаланырга.

V бүлек

400. а) C; б) E; в) B; г) A, C, E, H; д) B, E, G; е) B, C, D. **402.** $B_1(1;\ 0;\ 1)$, $C(0;\ 1;\ 1)$, $C_1(1;\ 1;\ 1)$, $D_1(1;\ 1;\ 0)$. **403.** $\vec{a}\{3;\ 2;\ -5\}$, $\vec{b}\{-5;\ 3;\ -1\}$, $\vec{c}\{1;\ -1;\ 0\}$, $\vec{d}\{0;\ 1;\ 1\}$, $\vec{m}\{-1;\ 0;\ 1\}$, $\vec{n}\{0;\ 0;\ 0{,}7\}$. **409.** а) $\{7;\ -2;\ 1\}$; б) $\{-7;\ 2;\ -1\}$; в) $\{5;\ -1{,}2;\ 1\}$; г) $\left\{-5\frac{1}{3};\ 3\frac{2}{5};\ -1\frac{1}{7}\right\}$; д) $\left\{\frac{1}{3};\ -2{,}2;\ \frac{1}{7}\right\}$; е) $\{7;\ -1{,}8;\ 1\}$; ж) $\{7;\ -2{,}2;\ 1\}$; з) $\{10;\ -2;\ 2\}$; и) $\{6;\ -3;\ 0\}$; к) $\{0;\ -1{,}2;\ 0\}$; л) $\left\{\frac{1}{6};\ -\frac{4}{5};\ \frac{1}{21}\right\}$; м) $\{-0{,}4;\ 0{,}2;\ 0\}$. **410.** $\vec{p}\{4;\ -18;\ -9\}$, $\vec{q}\{5;\ 15;\ -5\}$. **411.** а) $\{0;\ 5;\ -1\}$; б) $\{-3;\ 2;\ 1\}$; в) $\{7{,}8;\ 2{,}5;\ 4{,}1\}$; г) $\{-3;\ 9;\ -3\}$. **412.** $-\vec{i}\{-1;\ 0;\ 0\}$, $-\vec{j}\{0;\ -1;\ 0\}$; $-\vec{k}\{0;\ 0;\ -1\}$, $-\vec{a}\{-2;\ 0;\ 0\}$, $-\vec{b}\{3;\ -5;\ 7\}$, $-\vec{c}\{0{,}3;\ 0;\ -1{,}75\}$. **413.** в) Юк; г) әйе; д) юк. **414.** а) $m = 10$, $n = 1\frac{1}{5}$; б) $m = 0{,}1$, $n = -2$. **415.** а) Әйе; б) юк; в) әйе; д) юк; е) юк. **418.** а) $\{-1;\ 0;\ 2\}$; б) $\{5;\ -7;\ 2\}$; в) $\left\{-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ -\frac{1}{4}\right\}$. **419.** $\overrightarrow{AB} = \vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}$, $\overrightarrow{BC} = -5\vec{i} + \vec{j} + 6\vec{k}$, $\overrightarrow{CA} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. **420.** Әйе. **421.** б) Әйе; в) юк. **422.** а) Әйе; б) юк; в) әйе. **423.** Күрсәтмә. 366 нчы мәсьәләдән файдаланырга. **424.** а) $M(-1;\ 2{,}5;\ -2)$; б) $B(-8;\ 4;\ -19)$; в) $A(-24;\ 8;\ 28)$. **425.** а) $m = 2$, $n = -5$; б) $m = -0{,}5$, $n = 2$; в) $m = 1$, $n = -1$; г) $m = 2$, $n = -1$. **426.** а) 3; б) 17. **427.** $|\vec{a}| = 5\sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 7$, $|\vec{c}| = \sqrt{3}$, $|\vec{d}| = 2$, $|\vec{m}| = \sqrt{5}$. **428.** а) $\sqrt{6}$; б) $2\sqrt{14}$; в) 0; г) $5\sqrt{2}$; д) $3\sqrt{14}$; е) 14; ж) $\sqrt{326}$. **429.** $\sqrt{14}$. **430.** а) $3 + 2\sqrt{2}$; б) $0{,}5$; $\frac{\sqrt{73}}{4}$; $\frac{\sqrt{73}}{4}$. **431.** а) Тәзек; б) төрле яклы турыпочмаклы;

в) төрле яклы турыпочмаклы; г) тигезьянлы турыпочмаклы. **432.** а) 4, 4, 3; б) $4\sqrt{2}$, 5, 5. **433.** (0; 2; −3), (−1; 2; 0), (−1; 0; −3). **434.** (3; 0; 0), (0; −4; 0), (0; 0; $\sqrt{7}$). **435.** 3,75; 2; 4; $1-2\sqrt{2}$ һәм $1+2\sqrt{2}$. **436.** Күрсәтмә. а) A, B һәм C нокталары бер турыда ятмаганын; б) $\overrightarrow{AB}$ һәм $\overrightarrow{DC}$ — бердәй юнәлешле тигез булмаган векторлар; в) $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CB}|$ икәнен исбатларга. **437.** а) (−1,6; 0; 0); б) (0; 8; 0); в) (0; 0; 1). **438.** а) $\left(\frac{3}{8}; \frac{17}{8}; 0\right)$; б) $\left(0; 1; \frac{3}{2}\right)$; в) $\left(-\frac{1}{3}; 0; \frac{17}{6}\right)$. **439.** а) (2; 3; 0), $\sqrt{13}$; б) (2; 3; −1). **440.** $\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+m^2}$.

441. а) 45°; б) 135°; в) 60°; г) 45°; д) 90°; е) 90°; ж) 0°; з) 180°. **442.** $\widehat{\overrightarrow{BA}\,\overrightarrow{DC}} = \varphi$, $\widehat{\overrightarrow{BA}\,\overrightarrow{CD}} = \widehat{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{DC}} = 180° - \varphi$. **443.** а) a^2; б) $-2a^2$; в) 0; г) a^2; д) a^2; е) $-\frac{a^2}{2}$; ж) $-\frac{3}{2}a^2$. **444.** $\vec{a}\,\vec{c} = 3$, $\vec{a}\,\vec{b} = 0$, $\vec{b}\,\vec{c} = 3$, $\vec{a}\,\vec{a} = 6$, $\sqrt{\vec{b}\,\vec{b}} = \sqrt{3}$. **445.** а) −10; б) 3; в) 1; г) −4; д) 28. **446.** а) Җәенке; б) кысынкы; в) туры. **448.** а) 5,5; б) 3,5; в) 4. **449.** $m = 4$. **450.** Күрсәтмә. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AD} = 0$, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}|$ икәнен исбатлагыз. **451.** а) 60°; б) 135°; в) 150°; г) 45°; д) 90°. **452.** $\widehat{\vec{a}\,\vec{i}} \approx 50°46'$, $\widehat{\vec{a}\,\vec{j}} \approx 63°26'$, $\widehat{\vec{a}\,\vec{k}} \approx 50°46'$. **453.** 60°. **454.** $\angle A = 120°$, $\angle B = \angle C = 30°$, $P = 2\sqrt{2}\,(2+\sqrt{3})$, $S = 2\sqrt{3}$. **455.** а) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $-\frac{1}{3}$; в) 0. **456.** 90°. **457.** 3. **459.** а) 1, $\frac{1}{2}$; б) $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$. **461.** Күрсәтмә. $\overrightarrow{MN}$ һәм $\overrightarrow{BC}$ векторларын $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{DB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{DC}$ векторлары аша күрсәтергә.

462. а) −1; б) −1,5; в) 4; г) $\sqrt{2}$; д) 2; е) $-\frac{1}{4}$; ж) $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **464.** а) 30°; б) 60°; в) 0°; г) 45°. **466.** а) $\frac{3}{\sqrt{29}}$; б) $\frac{2}{\sqrt{58}}$; в) $\frac{1}{\sqrt{87}}$; г) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{29}}$. **467.** а) ≈ 71°34′; б) ≈ 59°44′. **468.** а) $\frac{3}{\sqrt{70}}$; б) $\frac{9}{\sqrt{130}}$; в) $\frac{5}{\sqrt{182}}$. **469.** а) $\frac{10}{\sqrt{134}}$; б) $\frac{3}{\sqrt{134}}$; в) $\frac{5}{\sqrt{134}}$. **470.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{2}{3}$. **471.** Күрсәтмә. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирелгән куб булсын. Мәсәлән, $AC_1 \perp A_1B$ икәнен исбатларга кирәк. $\overrightarrow{AC_1}$ һәм $\overrightarrow{A_1B}$ векторларын $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AA_1}$ векторлары буенча таркатырга һәм $\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{A_1B} = 0$ икәнен исбатларга. **473.** 60°. **475.** $\frac{1}{2}\sqrt{70+15\sqrt{2}}$. **476.** 45°. **477.** Күрсәтмә. $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ икәнен исбатларга. **479.** Күрсәтмә. Симметрия үзәге һәм бирелгән туры аша үтүче яссылыкны тикшерергә һәм мәсьәләне «Геометрия, 7—9» дагы 1149 нчы мәсьәләгә китерергә. **481.** Күрсәтмә. Хәрәкәтнең түбәндәге үзлекләреннән файдаланырга: хәрәкәт вакытында туры — турыга, параллель турылар — параллель турыларга, ә почмак үзенә тигез почмакка чагылдырыла. **484.** Күрсәтмә. Параллель күчерү хәрәкәт икәнен искә алырга, шуңа күрә параллель күчерүдә туры турыга чагыл-

дырыла. **485.** Күрсәтмә. $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{AA_1} = \vec{p}$ икәнен исбатларга. **487.** Күрсәтмә. Расламалар «Геометрия, 7—9»дагы 114 нче пункттагы теорема кебек үк исбатлана һәм 1150 нче мәсьәлә кебек үк чишелә. **488.** Күрсәтмә. а), б) Каршы кую методы белән исбатларга. **490.** а) $\{3; 9; -24\}$; б) $\{-1{,}6; -2{,}3; 4{,}3\}$. **491.** а) Юк; б) әйе; в) әйе; г) юк. **492.** а) $(-1; 0; 0)$; б) $(0; -2; 0)$, $(0; 0; 2)$. **493.** а) Әйе; б) әйе; в) юк. **494.** Күрсәтмә. а) A, B һәм C нокталары бер турыда ятмаганын; б) AC һәм BD кисемтәләренең урталары тәңгәл килгәнен исбатларга. **495.** $\left(\frac{7}{3}; \frac{5}{3}; 3\right)$. **496.** $C(6; 5; 5)$, $D_1(9; 4; 1)$, $B_1(4; 7; 4)$, $C_1(8; 8; 4)$. **497.** а) 1; б) -2; в) 0. **498.** $\left\{\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right\}$, $\left\{\frac{1}{\sqrt{10}}; \frac{3}{\sqrt{10}}; 0\right\}$. **499.** 4 яки -4. **500.** 1. **501.** $2\sqrt{7}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{29}$. **502.** $(0; 42{,}4; 0)$. **503.** $(1; 1{,}5; 1{,}5)$. Күрсәтмә. $\angle ACB = 90^\circ$ икәнен искә алырга. **504.** 6 дм. **505.** Күрсәтмә. Координаталар системасы кертергә һәм бирелгән $ABCD$ тетраэдрының түбәләренең координаталарын $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$, $D(x_4; y_4; z_4)$ дип тамгаларга. Медианаларның кисешү ноктасы $\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}; \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}; \frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}\right)$ координаталарына ия икәнен искә алырга. **506.** а) 3; б) $-3{,}5$; в) 5; г) 7; д) -10. **507.** а) 135°; б) 60°; в) $67^\circ 30'$. **508.** а) Әйе; б) әйе; в) әйе; г) юк. **509.** а) $\frac{2}{\sqrt{114}}$; б) $\frac{5}{9}$. **510.** а) 90°; б) $\approx 114^\circ 06'$. **511.** а) $\sqrt{6}$; б) $\sqrt{2}$. **512.** а) $\frac{7}{65}$; б) $\frac{5}{13}$; в) $\frac{4}{13}$; г) $\frac{3}{13}$. **513.** а) $\frac{9}{\sqrt{38}}$; б) $\frac{3}{\sqrt{38}}$. **515.** 45°. **516.** $\sin\theta\cos\varphi$. **517.** $\sqrt{n^2+m^2+p^2+pn}$. **518.** Күрсәтмә. а) Каршы кую методы белән исбатларга; б) M — a турысының α яссылыгы белән кисешү ноктасы, A — a турысындагы нокта, B һәм C — α яссылыгындагы M нан үзгә нокта булсын. AMB һәм AMC өчпочмакларына Пифагор теоремасын кулланырга. **519.** Күрсәтмә. α һәм β, α һәм β_1 яссылыклары белән ясалган икекырлы почмакларның сызыклы почмакларын тикшерергә. **520.** Күрсәтмә. α яссылыгында кисешүче ике туры алырга һәм 484 нче мәсьәләдән файдаланырга.

VI бүлек

521. 5 м. **522.** а) 24 см; б) $12\sqrt{3}$ см; в) 432π см^2. **523.** а) $10\sqrt{2}$ см; б) 50π см^2. **524.** Юк. **525.** $\sqrt{5\pi}$ м. **526.** а) 30°; б) 60°. **527.** а) 5 дм; б) 3 см. **529.** 64 см^2. **530.** 8 см. **531.** 15 дм. **532.** $\frac{1}{\cos\varphi}$. **533.** $\sqrt{S^2-4h^2d^2}$. **534.** $2\sqrt{3}\,dh$. **535.** 40 см^2. **536.** $S\sqrt{2}$. **537.** π^2 м^2. **538.** $\frac{S}{\pi}$. **539.** $1{,}125\pi$ кг. **540.** 6 см, 18 см. **541.** $0{,}82\pi \approx 2{,}58$ м^2. **542.** $4S \cdot \mathrm{ctg}\,\varphi$. **543.** $S_{як} = \frac{1}{2}d^2\sin\varphi$, $S_{цил} = \frac{1}{2}d^2\sin\varphi + \frac{1}{2\pi}d^2\sin^2\frac{\varphi}{2}$ яки $S_{цил} = \frac{1}{2}d^2\sin\varphi + \frac{1}{2\pi}d^2\cos^2\frac{\varphi}{2}$. **544.** $\frac{d^2}{8\pi}$.

545. а) $2a^2$; б) $2\pi a^2$; в) $4\pi a^2$. **546.** б) $\frac{b}{a}$. **547.** 17 см. **548.** а) 108π см^2; б) 72π см^2; в) 36π см^2. **549.** а) $4\sqrt{2}$ дм; б) 4 дм. **550.** 25 см^2. **551.** а) r^2; б) $r^2\sqrt{2}$; в) $r^2\sqrt{3}$. **552.** $2h^2$. **553.** $6\sqrt{\frac{\pi}{8}}$ дм. **554.** а) $\frac{r\sqrt{4l^2-r^2}}{4}$; б) $\frac{r\sqrt{2l^2-r^2}}{2}$. **555.** а) 200 см^2; б) $\frac{100}{3}\sqrt{6}$ см^2; в) $\frac{200\sqrt{3}}{9}$см^2. **558.** $\alpha = 216°$. **559.** 180°. **560.** а) 60°; б) $2\arcsin\frac{1}{4}$; в) $2\arcsin\frac{1}{6}$. **561.** 9π см^2, $6\sqrt{2}$ см. **562.** $\frac{169\pi\sqrt{3}}{8}$ см^2. **563.** $0{,}9\pi$ см^2. **564.** $\frac{\pi a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}}{2\sin^2\alpha\cos\varphi}$. **565.** $S_{ян} = 80\pi$ см^2, $S_{кон} = 144\pi$ см^2. **566.** $2\pi m^2\sin\varphi$. **567.** 5 см. **568.** а) 8 см; б) 128 см^2. **569.** $R^2 - r^2$. **570.** 60 см^2. **571.** $33\sqrt{2}\,\pi$ см^2, $(33\sqrt{2} + 65)\pi$ см^2. **572.** $2{,}55\pi \approx 8{,}011$ кг. **574.** а) $10\sqrt{21}$ см; б) 12 мм; в) 16 дм; г) $\sqrt{a^2-b^2}$. **575.** $\frac{\sqrt{4R^2-m^2}}{2}$. **576.** а) $(x-2)^2 + (y+4)^2 + (z-7)^2 = 9$; б) $x^2 + y^2 + z^2 = 2$; в) $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 16$. **577.** а) $(x+2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 54$; б) $(x+2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 8$; в) $x^2 + y^2 + z^2 = 35$. **578.** а) (0; 0; 0), 7; б) (3; −2; 0), $\sqrt{2}$. **579.** а) (2; 0; 0), 2; б) (0; 1; 0), 5; в) (−1; 0; 0), 2; г) $\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; 1\right)$, $\sqrt{6}$. **580.** 1600π дм^2. **581.** 12 см. **582.** 6 см. **583.** 4 см. **584.** 3 см. **585.** 8 см. **586.** а) Яссылык сферага орынма була; б), в) яссылык сфераны кисеп үтә; г) яссылык белән сфераның уртак ноктала- ры юк. **587.** а) 80π см^2; б) $\sqrt{\frac{12}{\pi}+4}$ см. **588.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}R$; б) $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}R^2$. **589.** а) $2\sqrt{3}\,\pi$ см; б) $5\sqrt{2}\,\pi$ м. **590.** $\pi R^2\sin^2\varphi$. **591.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **592.** 1 см. **593.** а) 144π см^2; б) 16π дм^2; в) 8π м^2; г) 48π см^2. **594.** 36 м^2. **595.** $\frac{9}{\sqrt{\pi}}$см. **597.** 10 м. **598.** 900π см^2. **599.** $4\pi(r_1^2 + r_2^2)$. **601.** $\frac{\sqrt{15}}{2}$. **602.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **604.** $\sqrt{\frac{S_1^2+S_2^2}{2\pi(S_1+S_2)}}$. **605.** а) $\frac{3}{2}$; б) 2 яки $\frac{5}{4}$. **606.** $\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}$. **607.** $\frac{p}{2}$ яки $\frac{p}{4}$. **608.** 414π см^2. **610.** $-\frac{1}{3}$. **611.** $\frac{\sqrt{S_0^2-S_1^2}}{\pi}$. **612.** $\arccos\frac{1}{7}$. **613.** $4\sqrt{6}$ см^2. **614.** $\arcsin\frac{3}{4}$. **615.** $\frac{\pi ab(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **616.** $40\sqrt{3}\,\pi$ см^2. **617.** а) $\frac{9\sqrt{3}}{4}(\sqrt{73}+3)$ см^2; б) $(18+6\sqrt{41})$ см^2; в) $\frac{9}{2}(\sqrt{91}+3\sqrt{3})$ см^2. **618.** $12\sqrt{10}\,\pi$ дм^2, $4(3\sqrt{10}+5)\pi$ дм^2. **620.** а) К ү р с ә т м ә. Сфераның диаметры өчпочмакның гипотенузасына тигез икәнен исбатларга; б) $2\sqrt{10}$ см. **621.** а) 30°; б) $\frac{35}{144}$. **622.** (3; 0; 0), (0; 0; −9), (0; 0; −1). **623.** $4\sqrt{2}$. **625.** б) $0{,}6R$. **626.** а) $2R\sqrt{\frac{3-4\sin^2\varphi}{3}}$, $4R\sin\varphi\sqrt{\frac{3-4\sin^2\varphi}{3}}$;

б) $\frac{16}{9}\pi R^2 \sin^2\varphi\,(3-4\sin^2\varphi)$. **627.** $\frac{240}{13}\pi$ см. **630.** $\frac{4\sqrt{10}+4\sqrt{17}+8}{15\pi}$. **631.** а) $\frac{3\sqrt{3}}{4}\times$ $\times(29+7\sqrt{73})$ см^2; б) $(58+14\sqrt{41})$ см^2; в) $\frac{21\sqrt{91}+87\sqrt{3}}{2}$ см^2. **634.** а) $24R^2$; б) $12\sqrt{3}\,R^2$; в) $24\sqrt{3}\,R^2$. **635.** а) $\frac{4R^2\cos\alpha}{(1-\sin\alpha)\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}}$; б) $100\sqrt{3}\,(2+\sqrt{3})$ см^2.

636. Курсәтмә. Бирелгән пирамиданың нигез ягының уртасы аша аңа перпендикуляр үтүче яссылык белән кисемен карарга. **639.** а) $8R^2$; б) $\frac{21\sqrt{3}}{4}R^2$; в) $\frac{8\sqrt{3}}{3}R^2$. **640.** $\frac{3\sqrt{5}-1}{4\sqrt{33}}a$, $\frac{2\sqrt{33}}{11}a$. **641.** $4\sqrt{3}$ см, 6 см яки $4\sqrt{2}$ см, 8 см. **642.** $\frac{2}{3}$. **643.** а) $R\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{4}\right)$; б) $r\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{4}\right)$; в) 60°. **644.** $\frac{2\pi r^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}$.

645. $\frac{3}{4}$. **646.** а) $R\sin\varphi$; б) $\frac{r}{\sin\varphi}$; в) 30° яки 150°.

VII бүлек

647. а) $V=V_1+V_2$; б) $V=\frac{2}{3}V_1+V_2$. **648.** а) 1980; б) 300; в) $1170\sqrt{3}$; г) $3{,}2\sqrt{5}$. **649.** а) $432\sqrt{2}$ см^3; б) $6\sqrt{6}$ м^3; в) $0{,}32\sqrt{5}$ см^3. **650.** 12 см. **651.** 3,51 кг. **652.** $240\sqrt{2}$ см^3. **653.** $729\sqrt{2}$ см^3. **654.** $\frac{h^3\sin\alpha\sqrt{\cos^2\beta-\sin^2\alpha}}{\sin^2\beta}$.
655. $ab\sqrt{3a^2-b^2}$. **656.** $432\sqrt{3}$ см^3. **657.** а) $\frac{1}{8}\cdot\sqrt{2}$ м^3; б) $1728\sqrt{2}$ см^3.
658. 2310 см^3. **659.** а) $\frac{75\sqrt{3}}{4}$ см^3; б) $1{,}5\sqrt{2}$. **660.** $0{,}5\,m^3\sin\varphi\cos\frac{\varphi}{2}$.
661. $\frac{l^3\sin\beta\cdot\cos^2\beta}{4\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}$. **662.** $\frac{Q^2\sin 2\beta}{2a}$. **663.** а) $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$; б) a^3; в) $1{,}5\sqrt{3}\,a^3$; г) $\frac{2a^3}{\mathrm{tg}\,22°30'}$.
664. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$. **665.** 72 см^3. **666.** а) 24π см^3; б) $\frac{10}{\sqrt{3\pi}}$ см; в) 2 см. **667.** ≈ 208 м.
668. ≈ 1513 т. **669.** $\frac{1}{2}S\sqrt{\pi Q}$. **670.** ≈ 61 кг. **671.** а) $3\sqrt{3}:4\pi$; б) $2:\pi$; в) $3\sqrt{3}:2\pi$; г) $2\sqrt{2}:\pi$; д) $\left(\frac{1}{2}n\cdot\sin\frac{360°}{n}\right):\pi$. **672.** $\frac{\pi a^2 h}{4\cos^2\alpha}$. **673.** 0,5. **674.** $\frac{\pi}{2}$.
675. $\frac{\pi}{5}$. **676.** $192\sqrt{3}$ см^3. **677.** $\frac{ab\sqrt{12a^2-3b^2}}{8}$. **678.** $\frac{1}{4}m^3\,\mathrm{tg}\,\varphi$. **679.** 1050 см^3.
680. $abc\sqrt{-\cos 2\varphi}$. **681.** $V=18\sqrt{39}$ см^3. **683.** 1080 см^3. Курсәтмә. Үткән мәсьәләдән файдаланыгыз. **684.** а) 6 м^3; б) 4950 см^3. **685.** $169\sqrt{3}$ см^3.
686. а) $\frac{\sqrt{3}}{8}l^3\sin 2\varphi\cos\varphi$; б) $\frac{1}{3}l^3\cos^2\alpha\sqrt{3-4\cos^2\alpha}$; в) $\frac{1}{3}l^3\sin^2\frac{\beta}{2}\sqrt{3-4\sin^2\frac{\beta}{2}}$.
687. $\frac{a^3\sqrt{3-4\sin^2\frac{\varphi}{2}}}{24\sin\frac{\varphi}{2}}$. **688.** а) $\frac{4H^3}{3\mathrm{tg}^2\beta}$; б) $\frac{m^3\sqrt{\cos\alpha}}{6\sin\frac{\alpha}{2}}$. **689.** $\frac{2}{3}m^3\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi$.

690. $6\sqrt{471}$ см^3, $6\sqrt{498}$ см^2. **691.** $\frac{845\sqrt{3}}{6}$ см^3. **692.** $\frac{1}{12}ab\sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{tg}\,\varphi$. **694.** 9 см^3. **695.** а) $\frac{1}{24}c^3 \sin 2\varphi\, \mathrm{tg}\,\theta$; б) 48 см^3; в) $\frac{1}{6}abc$. **696.** $1400\sqrt{3}$ см^3. **697.** $\frac{7\sqrt{47}a^3}{192}$. **698.** $\frac{1}{24}(m^3-n^3)\mathrm{tg}\,\varphi$. **699.** 1260 дм^3. **700.** $38\sqrt{2}$ см^3. **701.** а) $2{,}25\pi$ см^3; б) 9 см; в) $\sqrt{\frac{3p}{\pi m}}$. **702.** 375 см^3. **703.** $\frac{\sqrt{\pi Q(P^2-Q^2)}}{3\pi}$. **704.** $\frac{1}{12}\pi H^3$. **705.** 240π см^3 яки 100π см^3. **706.** 216°. **707.** $\frac{225\pi}{7}$ дм^3. **708.** 84π м^3. **709.** $\frac{Sh}{\pi l}$, $\frac{1}{12}\pi h\left(l^2-h^2+\frac{3S^2}{\pi^2 l^2}\right)$. **710.** а) 64π см^2, $\frac{256}{3}\pi$ см^3; б) ≈ 3 см, $\approx 36\pi$ см^2; в) 4 см, $\frac{256}{3}\pi$ см^3.

711. Җирнең күләме Ай күләменнән 64 тапкырга зуррак. **712.** $H=\frac{4}{3}R$, биредә H — цилиндрның биеклеге, R — шарның радиусы. **713.** Юк. **714.** Су тигезлеге $\frac{32}{75}$ см га күтәрелә. **715.** $\frac{942}{125}\pi$ м^3. **716.** 5 : 16. **717.** $58\,500\pi$ см^3 яки $504\,000\pi$ см^3. **718.** $\frac{52}{81}\pi R^3$. **719.** 252π см^3 һәм 720π см^3. **720.** $112\,500\pi$ см^3. **721.** $\frac{2-\sqrt{3}}{3}\pi R^3$. **722.** $6375^2\pi \approx 1{,}28\cdot 10^8$ км$^2 = 128\times 10^6$ км^2. **723.** $432\pi \approx 1357$ см^2. **725.** $\sqrt{S_1\cdot S_2\cdot S_3}$, 36 дм^3. **726.** $48\sqrt{11}$ см^3. **727.** $a\sqrt{Q^2-Qa^2}$. **728.** 105 см^3. **729.** $16\sqrt{11}$ см^3. **730.** $\frac{a^3}{4}$. **731.** 1 м, 2 м, $\sqrt{5}$ м, 3 м, 3 м, 3 м. **732.** $\frac{1}{3}d^3\sin^2\varphi\sqrt{3\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}$ яки $\frac{1}{3}d^3\sin^2\varphi\sqrt{3-4\sin^2\varphi}$.

733. Күрсәтмә. Өчпочмаклы призманы параллелепипедка тутырыгыз. **734.** Күрсәтмә. 733 нче мәсьәләдән файдаланырга. **735.** 6,12 дм^3. Күрсәтмә. 682 нче мәсьәләдән файдаланырга. **736.** $\frac{m^3\sqrt{3}}{27\sin^3\varphi\cos\varphi}$.

737. $\frac{16m^3}{3\,\mathrm{tg}^2\varphi}$. **738.** $\frac{\sqrt{3}}{4}h^3(3\,\mathrm{tg}^2\varphi-1)$. **739.** $\frac{a^3n}{24\,\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}}\cdot\sqrt{\frac{1}{\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}-\frac{1}{\mathrm{tg}^2\frac{180^\circ}{n}}}$.

740. $\frac{2h^3\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2\cdot\sin(\varphi_1+\varphi_2)}{3\,\mathrm{tg}^2\varphi_3}$. **741.** $\frac{2H^3\sin\alpha}{3\,\mathrm{tg}\,\beta\cdot\mathrm{tg}\,\gamma}$. **742.** $\frac{1}{3}a^3\sin^2\varphi\,\mathrm{tg}\,\theta$.

743. а) $\frac{a}{12}\sqrt{4a^2b^2-a^4-b^4}$; б) $\frac{b^2}{12}\sqrt{4a^2-2b^2}$. **744.** 31 : 73. **745.** а) $\frac{S}{2}\sqrt{\frac{Q}{\pi}}$; б) $\frac{\pi h^3}{4}$; в) $\frac{S}{6}\sqrt{\frac{2S}{3\pi}}$. **747.** ≈ 7065 л. **748.** $\frac{\pi a^3\,\mathrm{tg}\,\varphi_2}{24\sin^2\frac{\varphi_1}{2}\cdot\mathrm{tg}\frac{\varphi_1}{2}}$. **749.** $\frac{a^3\pi}{24}\sin^3\varphi\,\mathrm{tg}\,\theta$.

750. $\frac{3}{2}$. **751.** 96π дм^3. **752.** $2\pi r\frac{l-r}{l}$. **753.** $\frac{r^2+rr_1+r_1^2}{2rr_1}$. **754.** $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}^3\frac{\alpha}{2}\cdot V$. **755.** $\frac{\pi}{6}a^3\sin^3\alpha\,\mathrm{tg}^3\frac{\beta}{2}$. **756.** $\pi R^3\sin 2\alpha\cos\alpha$. **757.** $\frac{\pi l^3}{6\cos^3\frac{\alpha}{2}}$. **758.** $\frac{\pi}{H^2}(H^2+r^2)^2$, $\frac{\pi}{6H^2}(H^2+r^2)^3$. **759.** $\frac{4\pi}{\sin^2 2\alpha}$ см^2, $\frac{4\pi}{3\sin^3 2\alpha}$ см^3. **760.** $\frac{100\pi}{\sin^2 2\beta}$ см^2, $\frac{500\pi}{3\sin^3 2\beta}$ см^3.

761. $\approx 6{,}56$ м. **762.** Шар иң зур күләмгә ия, конус иң кечкенә күләмгә ия. **763.** а) Юк; б) әйе. Күрсәтмә. Шарның тыгызлыгын, бериш дип исәпләп, су тыгызлыгы белән чагыштырыгыз.

Кабатлау өчен мәсьәләләр

764. а) $9\sqrt{3}$ см^2; в) arctg 0,5; г) arctg $\frac{\sqrt{2}}{2}$; д) 6 см; е) $27\sqrt{3}$ см^2. **765.** а) $72\sqrt{7}$ см^2; б) $144\sqrt{3}$ см^3; в) arctg $\sqrt{6}$; г) $60°$; д) 72; е) 192π см^2. **766.** а) $6\sqrt{3}\,(2+\sqrt{13})$ см^2; б) $12\sqrt{3}$ см^3; в) arcsin 0,6; г) arctg 1,5; д) 12; е) $(12-6\sqrt{3})$ см. **767.** а) $32\sqrt{7}$ см^2; б) $\frac{128\sqrt{3}}{3}$ см^3; в) arctg $\sqrt{6}$; г) 2 arctg $\frac{\sqrt{6}}{6}$; д) 48; е) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ см.

Катлаулырак мәсьәләләр

768. $3(1+2\sqrt{2})$ см^2. **769.** Күрсәтмә. Тетраэдрның түбәсе нигезенең биеклекләре кисешү ноктасына проекцияләнә дип уйлыйк. Ул вакытта тетраэдрның теләсә кайсы кабыргасы каршы яткан кабыргага перпендикуляр. Аннары өч перпендикуляр турындагы кире теореманы кулланырга. **770.** Күрсәтмә. O_1 — ABC өчпочмагы биеклекләренең кисешү ноктасы булуын искә алырга. **771.** Күрсәтмә. Тетраэдр күләме формуласыннан файдаланырга. **772.** Җиде. **773.** Күрсәтмә. Бирелгән икекырлы почмакның сызыклы почмагының биссектрисасы һәм аның кабыргасы аша яссылык үткәрергә, бу яссылыкның бирелгән туры белән кисешү ноктасын кырларга проекцияләргә. Аннары килеп чыккан өчпочмакларның тигезлегеннән файдаланырга. **775.** Күрсәтмә. A — ирекле рәвештә алынган түбә, O — кубның үзәге, A_1 — A ноктасының бирелгән турыга проекциясе булсын: ул вакытта $AA_1 = OA \cdot \sin\varphi$, биредә φ — OA һәм OA_1 арасындагы почмак. OA_1 турысыннан кубның түбәләренә кадәр ераклыкларның квадратлары суммасын язарга һәм косинуслар теоремасыннан файдаланырга. **776.** Күрсәтмә. Күрсәтелгән тетраэдрлар уртак түбәгә ия, ә аларның нигезләре — катетлары кубның кабыргасына тигез булган тигезьянлы турыпочмаклы өчпочмаклар. **777.** Күрсәтмә. Кубның җәелмәсен карарга. **778.** Күрсәтмә. Тишемнең кучәре сыйфатында кубның диагонален алырга. **779.** $\frac{25}{16}S$. **780.** $\sqrt{2}$ см. Күрсәтмә. Тетраэдр кубны камаучы сфера эчендә урнашырга тиеш булудан файдаланырга. **781.** Күрсәтмә. Килеп чыккан күпкырлыкның барлык түбәләре куб кырларының урталары икәнен исбатларга. **782.** Күрсәтмә. Параллелепипедның кайсы да булса кырын алырга, бу кырга янәшә иң кечкенә кубны сайлап алырга һәм аңа калган кубларны ничек куярга икәнен ачыкларга. **783.** Күрсәтмә. Сынык сызыкның түбәләрен кубның түбәләре уртак булган өч кабыргасына проекцияләргә һәм өчпочмакның яклары арасындагы бәйләнештән файдаланырга. **784.** Күрсәтмә. Башта,

AB кисемтәсе кузгалмаса, ә CD кисемтәсе хәрәкәт итсә, тетраэдрның күләме үзгәрмәвен исбатларга. **785.** *Күрсәтмә.* Симметриядән файдаланырга. **786.** *Күрсәтмә.* Симметриядән файдаланырга. **787.** $\sqrt{\frac{3}{7}}\,a$, $\arccos\sqrt{\frac{2}{4}}$. **788.** $\arccos\sqrt{\frac{3}{3}}$. **789.** *Күрсәтмә.* Диагональләрне бирүче векторларны кабыргаларны бирүче векторлар аша күрсәтергә. **790.** *Күрсәтмә.* Төшүче һәм кайтарылган нурларның юнәлешен билгеләүче векторларны тикшерергә. **791.** Ике чишелеше: 45° һәм 135°. **792.** *Күрсәтмә.* Мәсьәләнең шартыннан чыгып, тетраэдрның очлары уртак булган өч кабыргасын бирүче векторлар өчен бәйләнешне язарга. **793.** *Күрсәтмә.* Ян кабыргалар белән тигез почмаклар төзүче векторны тикшерергә һәм аның нигезенең ике кабыргасын бирүче векторларга перпендикуляр икәнен исбатларга. **794.** *Күрсәтмә.* O_1 — O ның ABC яссылыгына проекциясе. $\overrightarrow{O_1A}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BO_1}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CO_1}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ икәнен исбатларга. **795.** *Күрсәтмә.* Бу зурлык шар диаметрының квадратына тигез икәнен исбатларга. **796.** Диаметры шар үзәгеннән бирелгән турыга кадәр ераклыкка тигез булган шар эчендә урнашкан әйләнә дугасы, ә әйләнәнең яссылыгы бирелгән турыга перпендикуляр. **797.** Үзәге бирелгән сфераның үзәге белән тәңгәл килгән, ә радиусы $\frac{\sqrt{6}}{2}R$ га тигез булган сфера, биредә R — бирелгән сфераның радиусы. **799.** $r_3\geqslant\frac{r_1r_2}{(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2})^2}$, биредә r_3 — кечерәк шарның радиусы. **800.** $r=\frac{\sqrt{3}}{3}R$. **801.** $\lambda\neq 2$ булганда, $\frac{2\sqrt{3}(\lambda-1)-\sqrt{9\lambda^2-18\lambda+12}}{3(\lambda-2)}R$ һәм, $\lambda=2$ булганда, $\frac{\sqrt{3}}{6}R$. **802.** $\frac{1}{12}V$, $\frac{1}{4}V$, $\frac{1}{4}V$ һәм $\frac{5}{12}V$, биредә V — призманың күләме. **803.** *Күрсәтмә.* Тетраэдрны өчпочмаклы призмага кадәр төзергә һәм 733 нче мәсьәләдән файдаланырга. **804.** *Күрсәтмә.* Килеп чыккан тетраэдрларның уртак нигезгә һәм тигез биеклеккә ия икәнен исбатларга. **805.** 5 : 3. **806.** *Күрсәтмә.* Нигез итеп кабыргасы AB булган нинди дә булса кырын алып, аның мәйданы да, тетраэдрның биеклеге дә C һәм D нокталарының торышына бәйле булмавын искәрергә. **807.** $\frac{5}{24}$ см^3. *Күрсәтмә.* 803 нче мәсьәләдән файдаланырга. **808.** *Күрсәтмә.* Кисем эчендә A ноктасы алырга һәм күпкырлыкны A түбәсе уртак булган пирамидаларга бүлгәләргә. **809.** $\frac{10}{3}$ см^3. *Күрсәтмә.* Фигураның цилиндрларның күчәрләренә параллель яссылыклар белән кисемнәрен тикшерергә. **810.** $2\arcsin\frac{1}{3}$. **812.** $\frac{\pi a^3}{12}\left|3\,\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-\frac{\cos\alpha}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right|$. **813.** $\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$. **814.** *Күрсәтмә.* Тетраэдр түбәсе һәм капма-каршы кырның Эйлер турысы яткан яссылыкны тикшерергә (94 нче п. ны кара). **815.** *Күрсәтмә.* Үзәге G һәм коэффициенты $-\frac{1}{3}$ булган үзәкле охшашлыкны һәм шулай ук H һәм коэффициенты $\frac{1}{3}$ булган үзәкле охшашлыкны тикшерергә.

VIII бүлек

817. К ү р с ә т м ә. Әйләнмәләргә M ноктасындагы уртак орынманы кулланырга. **818.** К ү р с ә т м ә. Башта $\Delta ABC \sim \Delta BAD$ икәнен исбатларга. **820.** К ү р с ә т м ә. 86 нчы п. тагы 2 нче теоремадан файдаланырга. **821.** К ү р с ә т м ә. Ике очракны карарга: турыларның кисешү ноктасы түгәрәк эчендә һәм түгәрәк тышында ята һәм 86 нчы п. тагы 1 нче һәм 2 нче теоремалардан файдаланырга. **822.** К ү р с ә т м ә. Башта $\angle NMK = \angle MKN$ икәнен исбатларга. **823.** К ү р с ә т м ә. Башта $\angle AMN = \angle ANM$ икәнен исбатларга. **825.** К ү р с ә т м ә. Ике очракны карарга: AE турысы — кисүче һәм AE турысы — әйләнәгә орынма. **826.** К ү р с ә т м ә. Камаулы дүртпочмак билгесеннән файдаланырга. **827.** К ү р с ә т м ә. $ABCD$ — бирелгән дүртпочмак, ди. BB_1 диаметрын үткәрергә һәм башта $AB_1 = CD$ икәнен исбатларга. **828.** К ү р с ә т м ә. Күрсәтелгән биссектрисалар кисешү ноктасы аша AB га параллель булган һәм AD һәм BC турыларын E һәм F нокталарында кисүче туры үткәрергә һәм $EF = CD$ икәнен исбатларга. **829.** К ү р с ә т м ә. $ABCD$ дүртпочмагының AC диагоналендә $\angle ABK = \angle CBD$ булырлык K ноктасын билгеләргә һәм алга таба ABK һәм DBC, BCK һәм ABD өчпочмакларының охшашлыгыннан файдаланырга. **830.** К ү р с ә т м ә. $CDKE$ дүртпочмагының C һәм K почмакларының суммасын табарга. **831.** К ү р с ә т м ә. Күрсәтелгән биссектрисалар арасындагы почмакны дүртпочмакның ике капма-каршы почмаклары аша белдерергә. **833.** К ү р с ә т м ә. Трапециянең нигезләре a һәм b га тигез булсын. Башта камаулы әйләнәнең радиусы $\frac{ab}{a+b}$ га тигез икәнен исбатларга. **834.** $\frac{a^2+a(d-b)}{a-b}\sqrt{bd}$. **835.** К ү р с ә т м ә. Әйләнәгә бер ноктадан үткәрелгән орынмаларның кисемтәләре тигезлегеннән һәм шулай ук ике әйләнәгә тышкы орынмаларның кисемтәләре тигезлегеннән файдаланырга. **836.** К ү р с ә т м ә. Өчпочмак биссектрисасы турындагы теоремадан файдаланырга (п. 91). **837.** К ү р с ә т м ә. ABD һәм ACD өчпочмаклары мәйданнарының чагыштырмасы, бер яктан, BD һәм CD кисемтәләренең чагыштырмасына, икенче яктан, B һәм C түбәләреннән үткәрелгән биеклеләр чагыштырмасына тигез. **838.** а) $\frac{AO}{OA_1} = \frac{b+c}{a}$, $\frac{BO}{OB_1} = \frac{c+a}{b}$, $\frac{CO}{OC_1} = \frac{a+b}{c}$. К ү р с ә т м ә. $\frac{AO}{OA_1}$ чагыштырмасын табу өчен, BB_1 гә параллель булган A_1D кисемтәсен үткәрергә (D ноктасы AC кисемтәсендә ята) һәм алга таба табылган өчпочмакларның охшашлыгыннан һәм өчпочмакның биссектрисасы турындагы теоремадан файдаланырга (п. 91). в) Юк. К ү р с ә т м ә. б) , в) , г) пунктларында а) пунктындагы формуладан файдаланырга. **839.** К ү р с ә т м ә. 92 нче п. тагы (6) формуласыннан файдаланырга. **840.** К ү р с ә т м ә. BM турысы AC ягын D ноктасында кисеп үтә. AMD һәм CMD өчпочмакларының уртак биеклеге булуыннан файдаланырга. **841.** 3 : 4. К ү р с ә т м ә. Бирелгән өчпочмакны параллелограммга кадәр төзергә. **842.** $\frac{16\sqrt{15}}{5}$ см^2. **843.** 72 см^2. К ү р с ә т м ә. 841 нче мәсьәлә нәтиҗәсеннән файдаланырга. **844.** К ү р с ә т м ә. L ноктасы — AB ягында,

M ноктасы AC ягында ятсын, ди. $O - ABC$ өчпочмагының биссектрисалары кисешү ноктасы, $OL = OM = r$. $\frac{S_{LOM}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} r^2 \cdot \sin \angle LOM}{\frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A} = \frac{r^2}{AB \cdot AC}$ тигезлегеннән һәм $\frac{S_{MON}}{S_{ABC}}$ һәм $\frac{S_{NOL}}{S_{ABC}}$ чагыштырмалары өчен булган аналогик тигезлекләрдән һәм 92 нче п. тагы (5) һәм (6) формулаларыннан файдаланырга. **845.** б) К ү р с ә т м ә. а) пунктындагы формуладан һәм шулай ук 92 нче п. тагы (5) формуласыннан файдаланырга. **846.** К ү р с ә т м ә. b һәм d якларын кисешкәнгә кадәр дәвам итәргә һәм 845 а) мәсьәләсенең нәтиҗәсеннән файдаланырга. b һәм d яклары параллель булса, трапеция мәйданы формуласыннан файдаланырга. **847.** К ү р с ә т м ә. а) $S = S_{ABC} + S_{ADC}$ дан файдаланырга; б) а) пунктындагы формуладан файдаланырга. **848.** К ү р с ә т м ә. 847 нче а) мәсьәлә нәтиҗәсеннән һәм камаучы дүртпочмак якларының үзлегеннән (п. 89) файдаланырга; б) а) пункты формуласыннан файдаланырга. **849.** К ү р с ә т м ә. Башта BD, BH, DM һәм BK кисемтәләрен ABC өчпочмагының яклары аша күрсәтергә. **851.** К ү р с ә т м ә. Өчпочмагының биссектрисасы турындагы теоремадан (п. 91), 837 нче мәсьәлә нәтиҗәсеннән һәм Менелай теоремасыннан файдаланырга. **852.** К ү р с ә т м ә. 837 нче мәсьәлә нәтиҗәсеннән һәм Менелай теоремасыннан файдаланырга. **853.** К ү р с ә т м ә. Менелай теоремасыннан файдаланырга. **854.** К ү р с ә т м ә. Менелай теоремасыннан ике тапкыр файдаланып, трапециянең диагональләре кисешү ноктасы һәм ян-якларының дәвамнары кисешү ноктасы аша үтүче туры нигезләренең урталары аша үтүен исбатларга. **855.** К ү р с ә т м ә. ABC һәм ADC өчпочмакларына карата Менелай теоремасын файдаланырга. **856.** К ү р с ә т м ә. Камаучы өчпочмакның яклары үзлегеннән (п. 89) һәм 855 а) мәсьәләсе нәтиҗәсеннән файдаланырга. **857.** К ү р с ә т м ә. OO_1O_2 өчпочмагына карата Менелай теоремасын файдаланырга. **858.** К ү р с ә т м ә. Менелай теоремасыннан файдаланырга. **859.** К ү р с ә т м ә. Чева теоремасыннан файдаланырга. **860.** К ү р с ә т м ә. Чева теоремасыннан файдаланырга. **861.** К ү р с ә т м ә. CT нуры AB ягын C_1 ноктасында, ә CO нуры AB ягын C_2 ноктасында кисә, ди. Чева теоремасыннан файдаланып, C_1 һәм C_2 нокталары AB кисемтәсен бер үк чагыштырмада бүләләр, һәм, димәк, тәңгәл килгәннәрен исбатларга. **862.** К ү р с ә т м ә. а) Башта $\frac{\sin \angle ACC_1}{\sin \angle C_1CB} \cdot \frac{\sin \angle BAA_1}{\sin \angle A_1AC} \cdot \frac{\sin \angle CBB_1}{\sin \angle B_1BA} = \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A}$ икәнен исбатларга, аннары Чева теоремасыннан файдаланырга. б) Мәсьәлә а) пунктындагы мәсьәләгә охшаш чишелә. **863.** а) $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$; б) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; в) $x = -\frac{9\sqrt{2}}{4}$ һәм $x = \frac{9\sqrt{2}}{4}$. **864.** $(0; -2)$ һәм $\left(\frac{36}{13}; \frac{10}{13}\right)$ нокталарында кисешәләр. **865.** а) Дүрт ноктада кисешәләр: $(-2; -\sqrt{3})$, $(-2; \sqrt{3})$, $(2; -\sqrt{3})$, $(2; \sqrt{3})$; б) $(4; 0)$ ноктасында орыналар, $\left(\frac{4}{3}; -\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$ һәм $\left(\frac{4}{3}; \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$ нокталарында кисешәләр. **866.** а) $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$; б) 2; в) $x = -\frac{1}{2}$ һәм $x = \frac{1}{2}$. **867.** Дүрт

ноктада да кисешәләр: $\left(-\sqrt{6}; -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\sqrt{3}; -2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, $\left(\sqrt{3}; 2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, $\left(\sqrt{6}; \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$. **868.** Эксцентриситет $\sqrt{2}$ га тигез, директрисалар тигезләмәләре: $y + x - \sqrt{2k} = 0$ һәм $y + x + \sqrt{2k} = 0$. Күрсәтмә. 98 нче п. тагы 3 нче искәрмәдән файдаланырга. **869.** Директрисаның тигезләмәсе $y = \frac{4ac - b^2 - 1}{4a}$; фокусның координаталары $\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac - b^2 + 1}{4a}\right)$. Күрсәтмә. Башта, координаталар башлангычы парабола түбәсе белән тәңгәл килерлек итеп, координаталар күчәрләрен параллель рәвештә күчерергә кирәк. **870.** $R = \frac{1}{2}$ булганда, (0; 0) ноктасында орыналар, $R > \frac{1}{2}$ булганда, (0; 0) ноктасында орыналар һәм $(-\sqrt{2R-1}; 2R-1)$ һәм $(\sqrt{2R-1}; 2R-1)$ нокталарында кисешәләр.

Татарча-русча атамалар күрсәткече

Авыш призманың күләме — объём наклонной призмы 167
Авышманың нигезе — основание наклонной 40
— яссылыкка проекциясе — проекция наклонной на плоскость 40
Бәйләнешле фигура — связная фигура 58
Берәмлек вектор — единичный вектор 96
Бердәй юнәлешле векторлар — сонаправленные векторы 84
— — нурлар — сонаправленные лучи 17
Бирелгәнгә каршы вектор — вектор противоположный данному 87
Вектор — вектор 84
Векторлар арасындагы почмак — угол между векторами 112
Векторларны алу — вычитание векторов 88
— кушу — сложение векторов 87
— кушуның урын алыштыру законы — переместительный закон сложения векторов 87
— оештыру законы — сочетательный закон сложения векторов 87
— скаляр тапкырлауның тарату законы — распределительный закон скалярного умножения векторов 113
Векторларның аермасы — разность векторов 88
— коллинеарлыгы — коллинеарность векторов 84
— компланарлыгы — компланарность векторов 92
— перпендикулярлыгы — перпендикулярность векторов 112
— скаляр тапкырчыгышы — скалярное произведение векторов 112
— — тапкырчыгышының алыштыру законы — переместительный закон скалярного произведения векторов 113
— — — оештыру законы — сочетательный закон скалярного произведения векторов 113
— тигезлеге — равенство векторов 85
Векторны ноктадан башлап салу — откладывание вектора от точки 85
— санга тапкырлау — умножение вектора на число 89
— — тапкырлауның оештыру законы — сочетательный закон умножения вектора на число 89
— — — тарату законнары — распределительные законы умножения вектора на число 89
— өч компланар булмаган векторга таркату — разложение вектора по трём некомпланарным векторам 94

Векторның координаталары — координаты вектора 103
— **озынлыгы** — длина вектора 77
— **озынлыгын аның координаталары буенча исәпләү** — вычисление длины вектора по его координатам 106
— **скаляр квадраты** — скалярный квадрат вектора 113
Геометрик фигураның чиге — граница геометрической фигуры 61
— **җисем** — геометрическое тело 61
— **җисемнең өслеге** — поверхность геометрического тела 62
Җисемнең кисеме — сечение тела 62
— **күләме, төп үзлекләре** — объём тела, основные свойства 157, 158
Җисемнәрнең күләмнәрен анык интеграл ярдәмендә исәпләү — вычисление объёмов тел с помощью определённого интеграла 165
Ике нокта арасындагы ераклыкны исәпләү — вычисление расстояния между двумя точками 107
Ике параллель яссылык арасындагы ераклык — расстояние между двумя параллельными плоскостями 41
Ике яссылыкның параллельлек билгесе — признак параллельности двух плоскостей 20
— — **перпендикулярлык билгесе** — признак перпендикулярности двух плоскостей 49
Икекырлы почмак — двугранный угол 47
— **почмакның градуслы үлчәме** — градусная мера двугранного угла 48
— — **кабыргасы** — ребро двугранного угла 47
— — **кыры** — грань двугранного угла 47
— — **сызыкча почмагы** — линейный угол двугранного угла 48
Капма-каршы юнәлешле векторлар — противоположно направленные векторы 84
Кисек конус — усечённый конус 137
— **конусның биеклеге** — высота усечённого конуса 137
— — **күләме** — объём усечённого конуса 170
— — **нигезләре** — основания усечённого конуса 137
— — **тулы өслеге мәйданы** — площадь полной поверхности конуса 136
— — **тезүчесе** — образующая усечённого конуса 137
— — **ян өслеге** — боковая поверхность усечённого конуса 137
— — **ян өслеге мәйданы** — площадь боковой поверхности усечённого конуса 136
Кисек пирамида — усечённая пирамида 71
— — **төзек** — правильная усеченная пирамида 71
— — **пирамиданың апофемасы** — апофема правильной усечённой пирамиды 70
— — **биеклеге** — высота усечённой пирамиды 71
— — **күләме** — объём усечённой пирамиды 169
— — **нигезләре** — основания усечённой пирамиды 71
— — **ян кабыргалары** — боковые рёбра усечённой пирамиды 71
— — **ян кырлары** — боковые грани усечённой пирамиды 71
— — **ян өслеге мәйданы** — площадь боковой поверхности усечённой пирамиды 71
Кисемтә уртасының координаталарын исәпләү — вычисление координат середины отрезка 106
Кисешүче яссылыклар — пересекающиеся плоскости 6
Кисүче яссылык — секущая плоскость 27, 60
Коник өслек — коническая поверхность 135
Конус — конус 135
Конусның биеклеге — высота конуса 135
— **кисеме** — сечение конуса 135, 149
— **күләме** — объём конуса 170
— **күчәр кисеме** — осевое сечение конуса 136
— **күчәре** — ось конуса 135
— **нигезе** — основание конуса 135
— **тезүчесе** — образующая конуса 135
— **түбәсе** — вершина конуса 135

— тулы өслеге мәйданы — площадь полной поверхности конуса 136
— ян өслеге — боковая поверхность конуса 135
— — — җәелмәсе — развёртка боковой поверхности конуса 135
— — — мәйданы — площадь боковой поверхности конуса 136
Координата векторлары — координатные векторы 103
— күчәрләре — оси координат 102
— яссылыклары — координатные плоскости 102
Координаталар башлангычы — начало координат 102
Көзгедәгечә күчәр симметриясе — симметрия зеркальная осевая 75, 121, 122
— үзәкле симметрия — симметрия зеркальная осевая 75, 121, 122
Куб — куб 78
Куб метр, миллиметр, сантиметр — кубический метр, миллиметр, сантиметр 157
Күләмнәрне үлчәү берәмлеге — единица измерения объёмов 157
Күпкырлык — многогранник 60
— кабарынкы (кабарынкы булмаган) — многогранник выпуклый (невыпуклый) 60
— төзек — многогранник правильный 76
Күпкырлыкка камаулы сфера — многогранник описанный около сферы 144, 155
Күпкырлыкны камаучы сфера — многогранник вписанный в сферу 155
Күпкырлыкның диагонале — диагональ многогранника 60
— кабыргасы — ребро многогранника 60
— кыры — грань многогранника 60
— симметрия элементлары — элементы симметрии многогранника 76
— түбәләре — вершины многогранника 60
Күпочмак кагыйдәсе — правило многоугольника 88
Нокта — точка 3
Ноктага карата симметрик нокталар — точки симметричные относительно точки 75
Ноктадан яссылыкка кадәр ераклык — расстояние от точки до плоскости 41
— — үткәрелгән авышма — наклонная, проведённая из точки плоскости 40
— — — перпендикуляр — перпендикуляр, проведённый из точки к плоскости 40
Ноктаның абсциссасы — абсцисса точки 102
— аппликатасы — аппликата точки 103
— координаталары — координаты точки 102
— ординатасы — ордината точки 102
— параллель проекциясе — параллельная проекция точки 220
— яссылыкка проекциясе — проекция точки на плоскость 42
Нуль-вектор — вектор нулевой 84
Октаэдр — октаэдр 60
— төзек — правильный октаэдр 77
Өслек тигезләмәсе — уравнение поверхности 115
Өчпочмак кагыйдәсе — правило треугольника 87
Параллелепипед — параллелепипед 25
— турыпочмаклы — прямоугольный параллелепипед 49
— кагыйдәсе — правило параллелепипеда 93
Параллелепипедның диагонале — диагональ параллелепипеда 25
— киселе — сечение параллелепипеда 27
— нигезләре — основания параллелепипеда 25
— ян кабыргалары — боковые ребра параллелепипеда 25
— ян кыры — боковая грань параллелепипеда 25
Параллелограмм кагыйдәсе — правило параллелограмма 87
Параллель күчерү — параллельный перенос 123
Перпендикулярның нигезе — основание перпендикуляра 40
Пирамида — пирамида 69
— төзек — правильная пирамида 69

Пирамиданың биеклеге — высота пирамиды 69
— **күләме** — объём пирамиды 168
— **нигезе** — основание пирамиды 69
— **тулы өслеге мәйданы** — площадь полной поверхности пирамиды 69
— **түбәсе** — вершина пирамиды 62
— **ян кабыргалары** — боковые рёбра пирамиды 69
— **ян кыры** — боковая грань пирамиды 69
— **ян өслеге мәйданы** — площадь боковой поверхности пирамиды 69
Призма — призма 63
— **авыш** — наклонная призма 64
— **туры** — прямая призма 64
— **төзек** — правильная призма 64
Призманың биеклеге — высота призмы 64
— **нигезләре** — основания призмы 64
— **тулы өслеге мәйданы** — площадь полной поверхности призмы 64
— **ян кабыргалары** — боковые рёбра призмы 69
— **ян кыры** — боковая грань призмы 64
— — — **мәйданы** — площадь боковой поверхности призмы 64
Пространство фигураларын сурәтләү — изображение пространственных фигур 22
Пространствода турыпочмаклы координаталар системасы — прямоугольная система координат в пространстве 102
— **фигураларның тигезлеге** — равенство фигур в пространстве 227
Салып карау һәм хәрәкәтләр — наложения и движения 123, 124
Стереометрия аксиомалары — аксиомы стереометрии 4
Сфера — сфера 140
— **белән яссылыкның үзара торышы** — взаимное расположение сферы и плоскости 141
— **тигезләмәсе** — уравнение сферы 141
Сферага камаулы күпкырлык — сфера, описанная около многогранника 155
— **орынма яссылык** — касательная плоскость к сфере 143
Сфераны камаучы күпкырлык — сфера, вписанная в многогранник 144, 155
Сфераның (шарның) диаметры — диаметр сферы (шара) 131
— **(шарның) радиусы** — радиус сферы (шара) 140, 141
— **мәйданы** — площадь сферы 144, 176
— **(шарның) үзәге** — центр сферы (шара) 140
Тетраэдр — тетраэдр 24
— **төзек** — правильный тетраэдр 77
Тетраэдрның кисеме — сечение тетраэдра 27
Туры — прямая 3
Туры белән яссылык арасындагы ераклык — расстояние между прямой и плоскостью 41
Туры белән яссылык арасындагы почмак — угол между прямой и плоскостью 43
Турылар белән яссылыклар арасындагы почмакларны исәпләү — вычисление углов между прямыми и плоскостями 113
Туры белән яссылыкның параллельлеге — параллельность прямой и плоскости 11
— — — **параллельлек билгесе** — признак параллельности прямой и плоскости 12
— — — **перпендикулярлыгы** — перпендикулярность прямой и плоскости 34
— — — **перпендикулярлык билгесе** — признак перпендикулярности прямой и плоскости 33
Туры призманың күләме — объём прямой призмы 162
Турыга карата симметрик нокталар — точки симметричные относительно прямой 75
Турылар һәм яссылыклар арасындагы почмакларны исәпләү — вычисление углов между прямыми и плоскостями 113
Турыларның параллельлеге — параллельность прямых 9
Турыларның перпендикулярлыгы — перпендикулярность прямых 34

Турының юнәлтүче векторы — направляющий вектор прямой 114
Турыпочмаклы параллелепипедның күләме — объём прямоугольного параллелепипеда 159
— — үлчәнешләре — измерения прямоугольного параллелепипеда 50
Төзек додекаэдр — додекаэдр правильный 78
Төзек икосаэдр — икосаэдр правильный 77
— күпкырлыкларның симметрия элементлары — элементы симметрии правильных многогранников 79
— пирамиданың апофемасы — апофема правильной пирамиды 70
Фигураларны берсен икенчесенә салып карау — наложение фигур 227
Фигураның параллель проекциясе — параллельная проекция фигуры 220
— симметрия күчәре — ось симметрии фигуры 75
— — яссылыгы — плоскость симметрии фигуры 75
— — үзәге — центр симметрии фигуры 75
— чик ноктасы — граничная точка фигуры 61
— яссылыкка проекциясе — проекция фигуры на плоскость 43
— эчке ноктасы — внутренняя точка фигуры 58
Хәрәкәтләр — движения 121
Цилиндр — цилиндр 131
Цилиндрик өслек — цилиндрическая поверхность 130
Цилиндрның биеклеге — высота цилиндра 131
— кисеме — сечение цилиндра 131, 147
— күләме — объём цилиндра 163
— күчәр кисеме — осевое сечение цилиндра 136
— күчәре — ось цилиндра 131
— нигезләре — основания цилиндра 131
— радиусы — радиус цилиндра 131
— тулы өслеге мәйданы — площадь полной поверхности цилиндра 136
— төзүчесе — образующая цилиндра 131
— ян өслеге — боковая поверхность цилиндра 131
— — — җәелмәсе — развёртка боковой поверхности цилиндра 132
— — — мәйданы — площадь боковой поверхности цилиндра 132
Чалышма турылар — скрещивающиеся прямые 15
— — арасындагы ераклык — расстояние между скрещивающимися прямыми 41
— — — почмак — угол между скрещивающимися прямыми 18
Чикләнгән фигура — фигура ограниченная 61
Шар — шар 141
— катламы — шаровой слой 175
— катламының биеклеге — высота шарового слоя 175
— — күләме — объём шарового слоя 175
Шар сегменты — шаровой сегмент 174
— сегментының биеклеге — высота шарового сегмента 175
— — күләме — объём шарового сегмента 175
— — нигезе — основание шарового сегмента 174
Шар секторы — шаровой сектор 175
— секторының күләме — объём шарового сектора 175
Шарның зур түгәрәге — большой круг шара 142
— кисеме — сечение шара 142
— күләме — объём шара 160
Эллипс — эллипс 211
Яссы фигураларны сурәтләү — изображение плоских фигур 222
Яссылык — плоскость 3
Яссылыкка карата симметрик нокталар — точки, симметричные относительно плоскости 75
Яссылыкларның параллельлеге — параллельность плоскостей 48
— перпендикулярлыгы — перпендикулярность плоскостей 112

Эчтәлек

Кереш . . . 3
1. Стереометрия фәне . . . —
2. Стереометрия аксиомалары . . . 4
3. Аксиомалардан кайбер нәтиҗәләр . . . 6
Сораулар һәм мәсьәләләр . . . 7

I бүлек
Турыларның һәм яссылыкларның параллельлеге
§ 1. Турыларның, туры белән яссылыкның параллельлеге . . . 9
4. Пространствода параллель турылар . . . —
5. Өч турының параллельлеге . . . 10
6. Туры белән яссылыкның параллельлеге . . . 11
Сораулар һәм мәсьәләләр . . . 13
§ 2. Пространствода турыларның үзара торышы. Ике туры арасындагы почмак . . . 15
7. Чалышма турылар . . . —
8. Яклары бердәй юнәлешле почмаклар . . . 17
9. Турылар арасындагы почмаклар . . . 18
Сораулар һәм мәсьәләләр . . . —
§ 3. Яссылыкларның параллельлеге . . . 20
10. Параллель яссылыклар . . . —
11. Параллель яссылыкларның үзлекләре . . . 21
Сораулар һәм мәсьәләләр . . . 22
§ 4. Тетраэдр һәм параллелепипед . . . 24
12. Тетраэдр . . . —
13. Параллелепипед . . . 25
14. Кисемнәрне төзүгә мәсьәләләр . . . 27
Мәсьәләләр . . . 29
I бүлеккә сораулар . . . 31
Өстәмә мәсьәләләр . . . 32

II бүлек
Туры һәм яссылыкларның перпендикулярлыгы
§ 1. Туры һәм яссылыкның перпендикулярлыгы . . . 34
15. Пространствода перпендикуляр турылар . . . —
16. Яссылыкка перпендикуляр булган параллель турылар . . . —
17. Туры белән яссылыкның перпендикулярлык билгесе . . . 36
18. Яссылыкка перпендикуляр туры турындагы теорема . . . 38
Мәсьәләләр . . . —
§ 2. Перпендикуляр һәм авышмалар. Туры белән яссылык арасындагы почмак . . . 40
19. Ноктадан яссылыкка кадәр ераклык . . . —
20. Өч перпендикуляр турындагы теорема . . . 42
21. Туры белән яссылык арасындагы почмак . . . —
Мәсьәләләр . . . 44
§ 3. Икекырлы почмак. Яссылыкларның перпендикулярлыгы . . . 47
22. Икекырлы почмак . . . —
23. Ике яссылыкның перпендикулярлык билгесе . . . 49
24. Турыпочмаклы параллелепипед . . . 50
25*. Өчкырлы почмак . . . 51
26*. Күпкырлы почмак . . . 52

Мәсьәләләр 54
II бүлеккә сораулар 57
Өстәмә мәсьәләләр . . . . . —

III бүлек
Күпкырлыклар
§ 1. Күпкырлык төшенчәсе. Призма 60
27. Күпкырлык төшенчәсе . . . . . —
28*. Геометрик җисем 61
29*. Эйлер теоремасы 62
30. Призма 63
31*. Пространствода Пифагор теоремасы 65
Мәсьәләләр 67
§ 2. Пирамида 69
32. Пирамида . . . . . —
33. Төзек пирамида . . . . . —
34. Кисек пирамида 71
Мәсьәләләр 72
§ 3. Төзек күпкырлыклар 75
35. Пространствода симметрия . . . . . —
36. Төзек күпкырлык төшенчәсе 76
37. Төзек күпкырлыкларның симметрия элементлары 79
Практик биремнәр . . . . . —
Сораулар һәм мәсьәләләр 80
III бүлеккә сораулар 81
Өстәмә мәсьәләләр . . . . . —

IV бүлек
Пространствода векторлар
§ 1. Пространствода вектор төшенчәсе 84
38. Вектор төшенчәсе . . . . . —
39. Векторларның тигезлеге 85
Сораулар һәм мәсьәләләр 86
§ 2. Векторларны кушу һәм алу. Векторны санга тапкырлау 87
40. Векторларны кушу һәм алу . . . . . —
41. Берничә векторның суммасы 88
42. Векторны санга тапкырлау 89
Мәсьәләләр 90
§ 3. Компланар векторлар 92
43. Компланар векторлар . . . . . —
44. Параллелепипед кагыйдәсе 93
45. Векторны компланар булмаган өч вектор буенча таркату . . . 94
Сораулар һәм мәсьәләләр 95
IV бүлеккә сораулар 98
Өстәмә мәсьәләләр 99

V бүлек
Пространствода координаталар методы. Хәрәкәтләр
§ 1. Нокталың координаталары һәм векторның координаталары 102
46. Пространствода турыпочмаклы координаталар системасы . . . —
47. Векторның координаталары 103
48. Вектор координаталары белән нокта координаталары арасындагы бәйләнеш 105
49. Координаталар белән иң гади мәсьәләләр 106

Сораулар һәм мәсьәләләр . . . 108
§ 2. Векторларның скаляр тапкырчыгышы . . . 112
50. Векторлар арасындагы почмак . . . —
51. Векторларның скаляр тапкырчыгышы . . . —
52. Турылар һәм яссылыклар арасындагы почмакларны исәпләп чыгару . . . 113
53*. Яссылык тигезләмәсе . . . 115
Мәсьәләләр . . . 116
§ 3. Хәрәкәт . . . 121
54. Үзәкле симметрия . . . —
55. Күчәрле симметрия . . . 122
56. Көзгедәгечә симметрия . . . 123
57. Параллель күчерү . . . —
58*. Охшаш үзгәртү . . . 124
Мәсьәләләр . . . 125
V бүлеккә сораулар . . . 126
Өстәмә мәсьәләләр . . . 127
VI бүлек
Цилиндр, конус һәм шар
§ 1. Цилиндр . . . 130
59. Цилиндр төшенчәсе . . . —
60. Цилиндр өслегенең мәйданы . . . 132
Мәсьәләләр . . . 133
§ 2. Конус . . . 135
61. Конус төшенчәсе . . . —
62. Конус өслегенең мәйданы . . . 136
63. Кисек конус . . . 137
Мәсьәләләр . . . 138
§ 3. Сфера . . . 140
64. Сфера һәм шар . . . —
65. Сфера тигезләмәсе . . . 141
66. Сфера белән яссылыкның үзара торышы . . . —
67. Сферага орынма яссылык . . . 143
68. Сфераның мәйданы . . . 144
69*. Сфера һәм турының үзара торышы . . . —
70*. Цилиндрик өслеккә камалган сфера . . . 145
71*. Коник өслеккә камалган сфера . . . 146
72*. Цилиндрик өслекләрнең кисемнәре . . . 147
73*. Коник өслекнең кисемнәре . . . 149
Мәсьәләләр . . . 150
VI бүлеккә сораулар . . . 152
Өстәмә мәсьәләләр . . . 153
Күпкырлыклар, цилиндр, конус һәм шар белән төрле мәсьәләләр 155
VII бүлек
Җисемнәрнең күләмнәре
§ 1. Турыпочмаклы параллелепипед күләме . . . 157
74. Күләм төшенчәсе . . . —
75. Турыпочмаклы параллелепипедның күләме . . . 159
Мәсьәләләр . . . 161
§ 2. Туры призманың һәм цилиндрның күләме . . . 162
76. Туры призманың күләме . . . —
77. Цилиндрның күләме . . . 163

Сораулар һәм мәсьәләләр 164
§ 3. Авыш призманың, пирамиданың һәм конусның күләме 165
78. Җисемнәрнең күләмнәрен анык интеграл ярдәмендә исәпләү. . —
79. Авыш призманың күләме 167
80. Пирамиданың күләме 168
81. Конусның күләме 170
Мәсьәләләр 171
§ 4. Шарның күләме һәм сфераның мәйданы 174
82. Шарның күләме . . . . —
83. Шар сегментының, шар катламының һәм шар секторының күләме . . . . —
84*. Сфераның мәйданы 176
Сораулар һәм мәсьәләләр 177
VII бүлеккә сораулар 178
Өстәмә мәсьәләләр 179
Күпкырлыклар, цилиндр, конус һәм шар белән төрле мәсьәләләр 180
Кабатлау өчен мәсьәләләр 181
Катлаулырак мәсьәләләр 182

VIII бүлек
Планиметриядән кайбер мәгълүматлар
§ 1. Әйләнә белән бәйле почмаклар һәм кисемтәләр 187
85. Орынма һәм хорда арасындагы почмак . . . . —
86. Әйләнә белән бәйле кисемтәләр турында ике теорема 188
87. Түбәләре әйләнәнең эчендә һәм тышында булган почмаклар 189
88. Камаулы дүртпочмак 190
89. Камаучы дүртпочмак 192
Мәсьәләләр 193
§ 2. Өчпочмакларны чишү 195
90. Медиана турында теорема . . . . —
91. Өчпочмакның биссектрисасы турында теорема 196
92. Өчпочмак мәйданы формулалары 198
93. Герон формуласы 199
94. Эйлер мәсьәләсе 200
Мәсьәләләр 204
§ 3. Менелай һәм Чева теоремалары 206
95. Менелай теоремасы . . . . —
96. Чева теоремасы 207
Мәсьәләләр 209
§ 4. Эллипс, гипербола һәм парабола 211
97. Эллипс . . . . —
98. Гипербола 214
99. Парабола 217
Мәсьәләләр 219

Кушымталар
1. Пространство фигураларын сурәтләү 220
1. Фигураның параллель проекциясе . . . . —
2. Фигураның сурәте 221
3. Яссы фигураларны сурәтләү 222
4. Пространство фигураларын сурәтләү 224
2. Геометрия аксиомалары турында 225
Җаваплар һәм күрсәтмәләр 234
Татарча-русча атамалар күрсәткече 248

Учебное издание

Серия «МГУ — школе»

Атанасян Левон Сергеевич
Бутузов Валентин Фёдорович
Кадомцев Сергей Борисович
Киселёва Людмила Сергеевна
Позняк Эдуард Генрихович

ГЕОМЕТРИЯ
10—11 КЛАССЫ

Учебник для общеобразовательной школы
с татарским языком обучения

Базовый и профильный уровни

Казань. Татарское книжное издательство. 2013

Перевод с русского на татарский язык

Уку-укыту басмасы

«МДУ — мәктәпкә» сериясе

Атанасян Левон Сергеевич
Бутузов Валентин Фёдорович
Кадомцев Сергей Борисович
Киселёва Людмила Сергеевна
Позняк Эдуард Генрихович

ГЕОМЕТРИЯ
10—11 СЫЙНЫФЛАР

Татар телендә гомуми белем бирү
мәктәбе өчен дәреслек

Мөхәррирләре *Л. Х. Мөхәммәтҗанова, З. Х. Билалова*
Бизәлеш мөхәррире *Л. Р. Вафина*
Техник мөхәррирләре һәм компьютерда биткә салучылары
Р. Ф. Мөбарәкҗанова, Л. И. Матвеева
Корректорлары *А. А. Дәүләтова, Г. Р. Ногманова*

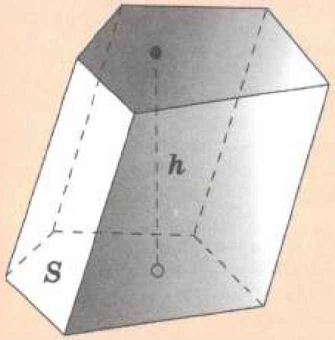
Оригинал-макеттан басарга кул куелды 11.06.2013. Форматы $70 \times 90^{1}/_{16}$.
Шартлы басма табагы 18,72 + форз. 0,29. Тиражы 5000 д. Заказ С-1343.

«Татарстан китап нәшрияты» ДУП. 420111. Казан, Бауман урамы, 19.
Тел./факс: (843) 519-45-22.
http://tatkniga.ru; e-mail: info@tatkniga.ru

«Татмедиа» ААҖ филиалы
«Идел-Пресс» полиграфия-нәшрият комплексы.
420066. Казан, Декабристлар урамы, 2.

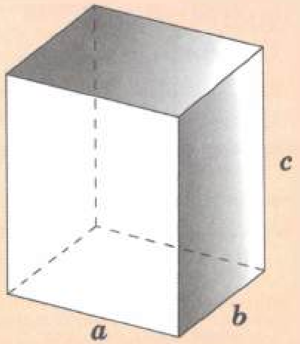
КҮПКЫРЛЫКЛАРНЫҢ КҮЛӘМНӘРЕ

Призма



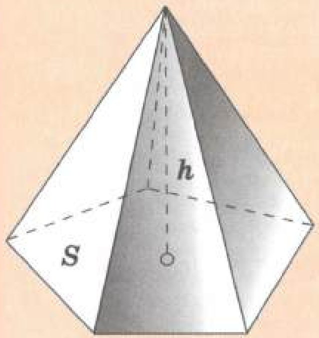
$V = Sh$

Турыпочмаклы параллелепипед



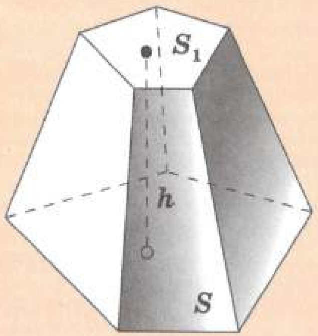
$V = abc$

Пирамида



$V = \frac{1}{3}Sh$

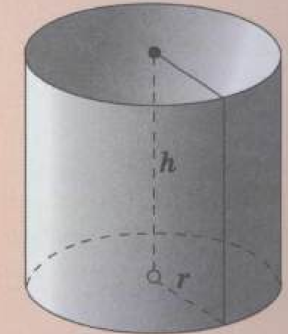
Кисек пирамида



$V = \frac{1}{3}h(S + S_1 + \sqrt{SS_1})$

ӘЙЛӘНҮ ҖИСЕМНӘРЕНЕҢ ӨСЛЕК МӘЙДАННАРЫ ҺӘМ КҮЛӘМНӘРЕ

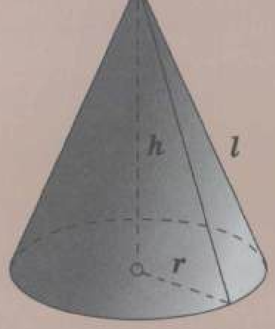
Цилиндр



$S_{ян} = 2\pi rh$

$V = \pi r^2 h$

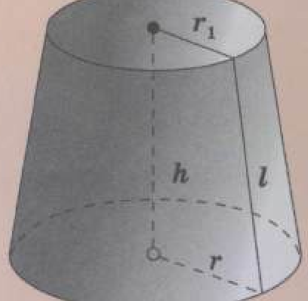
Конус



$S_{ян} = \pi rl$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

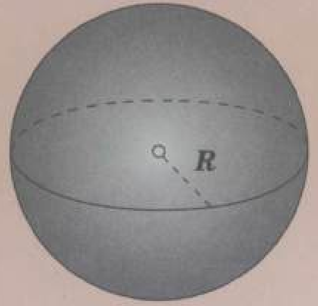
Кисек конус



$S_{ян} = \pi(r + r_1)l$

$V = \frac{1}{3}\pi h(r^2 + r_1^2 + rr_1)$

Сфера һәм шар



$S = 4\pi R^2$

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

МДУ – МӘКТӘПКӘ

ТӨП • ПРОФИЛЬЛЕ
БЕЛЕМНӘР

Геометриядән 10–11 сыйныфлар өчен уку укыту методик комплектына түбәндәгеләр кирә:

Л.С. Атанасян,
В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев,
Л.С. Киселёва, Э.Г. Позняк

ГЕОМЕТРИЯ

Учебник для 10–11 классов

Б.Г. Зив

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

по геометрии для 10 и 11 классов

В.Ф. Бутузов, Ю.А. Глазков, И.И. Юдина

РАБОЧИЕ ТЕТРАДИ

по геометрии для 10 и 11 классов

Б.Г. Зив, В.М. Мейлер, А.Г. Баханский

ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ

для 7–11 классов

С.М. Саакян, В.Ф. Бутузов

ИЗУЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ

в 10 и 11 классах

Книга для учителя

9 785295 024600